3　球面調和関数

3.1　枠束

ここでの目標は、$\mathcal{M}$ が対称空間である場合に、このように与えられた場に対する共変微分等の作用を代数的に表し、その固有値を与える公式を得ることにある。

量子力学において一般に用いられている記法を用いて、d 次元の多様体 $\mathcal{M}$ 上のスピン R の場を次のように表現しよう。

$$|\psi\rangle = \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, i\rangle \psi_i(\boldsymbol{x}). \tag{77}$$

$\boldsymbol{x}$ は $\mathcal{M}$ 上の点を表し、i はスピンに対する基底の添え字である。以下では基底となる状態 $|\boldsymbol{x}, i\rangle$ は次のようなテンソル積として定義される。

$$|\boldsymbol{x}\rangle \otimes |i\rangle. \tag{78}$$

正確には、ある点 $\boldsymbol{x}$ での基底は点ごとに独立に定義されるので、それらを区別するために $|i\rangle_{\boldsymbol{x}}$ のように添え字をつけて表すことにする。この基底はスピンごとに定義されるものであるが、それらは独立なものではなく、どれかの（自明でない）スピンにおける基底を全ての点 $\boldsymbol{x}$ において定義すれば、そのほかのスピンにおける基底も自然に定まる。そこで、スピンによらない概念としての「枠」を定義するのが便利である。

$|i\rangle_{\boldsymbol{x}}$ によって張られるベクトル空間を $V_{\boldsymbol{x}}$ としよう。また、それらとは独立に、同じ次元を持つベクトル空間を V_0 とし、その基底を $|i\rangle_0$ とする。$\mathcal{M}$ 上の各点での基底が与えられれば、$|i\rangle_0$ を $|i\rangle_{\boldsymbol{x}}$ に移す等長写像が一つ定まる。これを $f(\boldsymbol{x})$ とする。

$$f(\boldsymbol{x}) : V_0 \to V_{\boldsymbol{x}}. \tag{79}$$

逆に、V_0 上の基底 $|i\rangle_0$ と $f(\boldsymbol{x})$ が与えられれば、(79) によって各点での基底が定まる。V_0 と $V_{\boldsymbol{x}}$ は別の空間であり、$f(\boldsymbol{x})$ は自己同型ではないので、群の元とみなすことはできない。しかし仮に何らかの方法で V_0 と V_{x} を同一視したとすれば、$f(\boldsymbol{x})$ は $SO(d)$ の元であるとみなすことができる。従って $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathcal{M}$ 上の $SO(d)$ ファイバー束の断面であるとみなすことができる。このファイバー束のことを枠束と呼び、$F\mathcal{M}$ で表す。

枠束を導入することの利点は、特定のスピンによらずに枠を設定することができるという点である。枠束が与えられていた場合、あるスピン R に対する基底を与えるには、$\dim R$ 次元の線形空間 V_0 を一つ用意し、その上に基底 $|i\rangle_0$ を定義する。そしてその基底を (79) の写像によって $\mathcal{M}$ 上の各点で定義されたベクトル空間 $V_{\boldsymbol{x}}$ へ写像すればそれらがスピン R の場に対する基底を与える。このような考え方に基づき、スピン R の場の基底を

$$|\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes |i\rangle_0 \tag{80}$$

によって表すことにしよう。ここでの $|i\rangle_0$ は各点において定義された空間 $V_{\boldsymbol{x}}$ ではなく、V_0 の基底である。そして $V_{\boldsymbol{x}}$ との関係は枠束の断面 $f(\boldsymbol{x})$ によって指定されている。一般の場

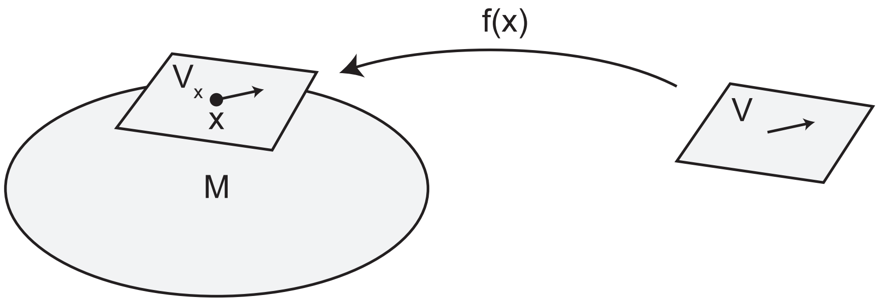

図 2: 枠束

の配位は、波動関数 $\psi_i(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$|\psi\rangle = \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes |i\rangle_0 \psi_i(\boldsymbol{x}) \tag{81}$$

と表される。枠束の断面 f は常にスピン空間の元 $|s\rangle$ に作用させて用いられるから、その作用の結果が同じものは等価である。従って、次の等価関係が成り立つ。

$$|\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})h\rangle \otimes |i\rangle_0 \sim |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes h|i\rangle_0, \quad h \in H = SO(d). \tag{82}$$

この等価関係によって定義されるテンソル積をしばしば $\otimes_H$ と書く。これを用いると、違う切断 $f' = fh$ を用いて定義された波動関数の間の関係が得られる。f' を用いて定義された波動関数を ψ' としよう。すると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f'(\boldsymbol{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi'_i(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi'_i(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes_H h(\boldsymbol{x})|i\rangle_0 \psi'_i(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i,j=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 h(\boldsymbol{x})_{ij} \psi'_j(\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{83}$$

ただし

$$h(\boldsymbol{x})_{ij} = {}_0\langle i|h(\boldsymbol{x})|j\rangle_0 \tag{84}$$

は $h(\boldsymbol{x})$ は表現 R における $h(\boldsymbol{x})$ の表現行列である。(83) を (81) と比較すれば、次の関係が得られる。

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\dim R} h(\boldsymbol{x})_{ij} \psi'_j(\boldsymbol{x}). \tag{85}$$

これは、スピン R の場に対する局所回転の変換則である。

場 $|\psi\rangle$ とその成分 $\psi_i(\boldsymbol{x})$ を関係させるためには、枠束の断面 $f(\boldsymbol{x})$ を一つ選ぶ必要があるが、共変微分を行う際に面倒なのは、この選んだ断面が、平行移動によって変化してしまうため、それを打ち消すような補正を行う必要があるということである。例えば、点 x にある粒子を点 x' に平行移動させることを考えよう。平行移動は $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon}$ におけるスピン空間 $V'_{\boldsymbol{x}}$ から $\boldsymbol{x}$ におけるスピン空間 $V_{\boldsymbol{x}}$ へのユニタリー変換を定める。

$$U_{\boldsymbol{\epsilon}} : V_{\boldsymbol{x}'} \to V_{\boldsymbol{x}} \tag{86}$$

この平行移動を P によって表すことにすると、

$$P|\boldsymbol{x}', f(\boldsymbol{x}')\rangle = |\boldsymbol{x}, U_{\boldsymbol{\epsilon}} f(\boldsymbol{x}')\rangle \tag{87}$$

のような枠の変化が起こる。新しい断面の点 $\boldsymbol{x}$ における値 $U_{\boldsymbol{\epsilon}} f(\boldsymbol{x}')$ はもとの断面 $f(\boldsymbol{x})$ とは異なるため、平行移動を用いて共変微分などを定義するためにはこの変化を補正する必要がある。例えば、$P|\psi\rangle$ を波動関数をもとの断面を用いて定義しようとすれば、

$$\begin{aligned} P|\psi\rangle &= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, U_{\boldsymbol{\epsilon}} f(\boldsymbol{x}')\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi_i(\boldsymbol{x}') \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\Omega_{\boldsymbol{\epsilon}}\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi_i(\boldsymbol{x}') \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes_H \Omega_{\boldsymbol{\epsilon}} |i\rangle_0 \psi_i(\boldsymbol{x}') \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\boldsymbol{x} \sum_{i,j=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Omega_{\boldsymbol{\epsilon},ij} \psi_j(\boldsymbol{x}') \end{aligned} \tag{88}$$

ただし

$$\Omega_{\boldsymbol{\epsilon}} = f^{-1}(\boldsymbol{x}) U_{\boldsymbol{\epsilon}} f(\boldsymbol{x}') : V_0 \to V_{\boldsymbol{x}'} \to V_{\boldsymbol{x}} \to V_0 \tag{89}$$

およびその表現 R における表現行列 $\Omega_{\boldsymbol{\epsilon},ij}$ を定義した。$\Omega_{\boldsymbol{\epsilon}}$ は V_0 上の同型写像であるから $SO(d)$ の元である。従って、$P|\psi\rangle$ の波動関数を $\psi_i^P(\boldsymbol{x})$ とすれば

$$\psi_i^P(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\dim R} \Omega_{\boldsymbol{\epsilon},ij} \psi_j(\boldsymbol{x}') \tag{90}$$

であり、$\Omega_{\boldsymbol{\epsilon}} = 1 + \epsilon^\mu \omega_\mu$ によってリー代数 $so(d)$ の元 ω_μ を定義すれば

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu D_\mu \psi_i(\boldsymbol{x}) &= \psi_i^P(\boldsymbol{x}) - \psi_i(\boldsymbol{x}) \\ &= \epsilon^\mu \left[\partial_\mu \psi_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{\dim R} \omega_{ij} \psi_j(\boldsymbol{x}) \right] \end{aligned} \tag{91}$$

が得られる。ω_μ はスピン接続であり、これが平行移動によって変化する断面 f に対する補正を表している。この接続の存在が計算をややこしくする。

この問題は、特定の断面 f を選ぶことによって引き起こされる。そこで、断面を固定せず、枠束 $F\mathcal{M}$ 上の関数として場を与えることにしよう。すなわち、いままで用いていた基底 (80) においては、点 $\boldsymbol{x}$ が与えられるとその点での枠は前もって選んでおいた断面 f によって一意的に決定されたのであるが、ここでは枠の取り方を表す写像 $f : V_0 \to V_{\boldsymbol{x}}$ を点 $\boldsymbol{x}$ とは独立な座標として扱い、$(\boldsymbol{x}, f)$ によって指定される基底

$$|\boldsymbol{x}, f\rangle \tag{92}$$

を用いようというものである。組 $(\boldsymbol{x}, f)$ は枠束 $F\mathcal{M}$ 上の点を与えるから、これは枠束上の関数の基底になっている。イメージとしては、組 $(\boldsymbol{x}, f)$ はスピン空間 V_0 を $\mathcal{M}$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ に f によって指定される向きに貼り付ける役割を果たす。この基底を用いると、一般の状態は次のように表すことができる。

$$|\psi\rangle = \int_f d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}, f) \tag{93}$$

(81) との違いは、波動関数は $F\mathcal{M}$ 上全体で定義されているということと、積分が任意の断面 f 上で行われるということである。断面 f の取り方にこの状態が依存しないためには被積分関数

$$\sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}, f). \tag{94}$$

が f に依存してはならない。すなわち、 f に依存してはならない。特に、f を fh（$h \in SO(d)$）に置き換えても不変であることから、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}, f) &= \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, fh\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}, fh) \\
&= \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f\rangle \otimes_H h|i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}, fh) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 h_{ij} \Psi_j(\boldsymbol{x}, fh).
\end{aligned} \tag{95}$$

が成り立たなければならない。途中でテンソル積 $\otimes_H$ が満足する性質 (82) を用いた。この式から、$F\mathcal{M}$ 上の波動関数 Ψ が満足する関係式

$$\Psi_i(\boldsymbol{x}, f) = \sum_{i=1}^{\dim R} h_{ij} \Psi_j(\boldsymbol{x}, fh) \tag{96}$$

が得られる。波動関数がこの条件を満足していれば、(93) によって定義される状態ベクトルは f の選び方に依存しない。

このような形で波動関数を定義しておくと、状態の平行移動は次のように与えることができる。

$$
\begin{aligned}
P_{\boldsymbol{\epsilon}}|\psi\rangle &= \int_f d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, U_{\boldsymbol{\epsilon}} f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}', f) \\
&= \int_f d\boldsymbol{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\boldsymbol{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\boldsymbol{x}', U_{\boldsymbol{\epsilon}}^{-1} f)
\end{aligned}
\tag{97}
$$

すなわち、平行移動された状態の波動関数は単純に

$$
\Psi_i^P(\boldsymbol{x}, f) = \Psi_i(\boldsymbol{x}', U_{\boldsymbol{\epsilon}}^{-1} f) \tag{98}
$$

によって与えられ、スピン接続などを考慮する必要がなくなる。あとは、(96) を満足する波動関数や平行移動を与える U をどのように与えればよいかという問題が残るが、次の節で見るように、対称空間の場合にはこれらの具体系は簡単に与えられる。

3.2 G/H 上の枠束

多様体 $\mathcal{M}$ に対して群 G が推移的に作用する場合を考えよう。これは $\mathcal{M}$ が一様な空間であることを意味する。

$\mathcal{M}$ の上に特定の一点（原点）O を選ぶ。原点を動かさない G の部分群を H とする。

$$
H = \{g \in G | gO = O\}. \tag{99}
$$

$g \in G$ が原点 O を x に移す、すなわち $x = gO$ とすると、gH の元も全て O を x に移す。従って、gH と点 x との同一視により、

$$
\mathcal{M} = G/H \tag{100}
$$

となる。これによって G は $\mathcal{M}$ 上の H-束になる。G から $\mathcal{M}$ への射影を π とする。

G と H のリー代数を $\mathcal{G}$ および $\mathcal{H}$ とする。また、$\mathcal{H}$ の直交補空間を $\mathcal{K}$ とする。次の関係式が成り立つことを仮定する。

$$
[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{H}. \tag{101}
$$

始めの二つは H が G の部分群をなすことから示されるが、最後の一つは非自明な仮定である。あとで $\mathcal{K}$ の作用を平行移動、$\mathcal{H}$ の作用を局所回転として扱うが、最後の条件は捩率が無いことに対応している。(139) の例においてはこれが成り立っていることが簡単に確かめられる。

前節において、$\mathcal{M}$ 上の場がその枠束 $F\mathcal{M}$ 上の場として与えられることを見た。枠束 $F\mathcal{M}$ 上の点は $\mathcal{M}$ 上の点とその点での局所直交系を定める。$\mathcal{M} = G/H$ の場合には、これ

は G の元を一つ与えることによって実現される。すなわち、原点 O において基準となる基底 $|i\rangle_0$ を定めておき、$g \in G$ によってこの直交系を点 g に移動したものを点 $\boldsymbol{x} = \pi(g)$ での基底 $|i\rangle_{\boldsymbol{x}}$ として採用することにすれば、G と $F\mathcal{M}$ の同相写像を定義することができる。（図 3）このように、$\mathcal{M} = G/H$ の場合には、$\mathcal{M}$ 上の点を与える $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ とその点で

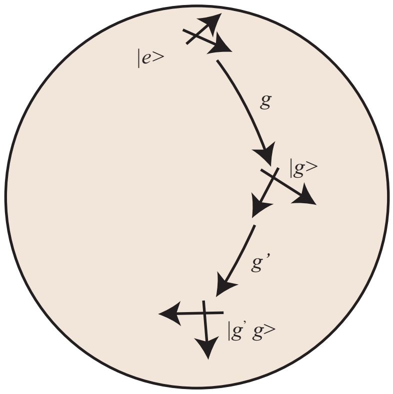

図 3:

の枠を決める $f : V_0 \to V_{\boldsymbol{x}}$ をひとまとめにして $g \in G$ によって与えることができる。そこで、$\mathcal{M}$ 上のスピン R の場の配位を与える (93) は次のように書くことができる。

$$|\Psi\rangle = \int dg|g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(g) \tag{102}$$

ただし $\otimes_H$ は次の同一視によって定義される。

$$|gh\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \sim |g\rangle \otimes_H h|i\rangle_0 \tag{103}$$

また、$G \sim F\mathcal{M}$ 上の波動関数 $\Psi_i(g)$ が満足すべき条件 (96) は

$$\Psi_i(g) = \sum_{i=1}^{\dim R} h_{ij}\Psi_j(gh), \quad \forall h \in H \tag{104}$$

となる。

実は、$\mathcal{M} = G/H$ である場合にはこの条件を満たす波動関数の完全系を与えることができる。スピン表現 R への分岐を含む G の表現を $\widetilde{R}$ とする。それぞれの $\widetilde{R}$ に対する表現行列を $\rho^{\widetilde{R}}_{AB}$ とし、これが作用する空間を $V_{\widetilde{R}}$ とする。$V_{\widetilde{R}}$ の基底の添え字として $A, B = 1, \ldots, \dim \widetilde{R}$ を用いる。この $\widetilde{R}$ が R へ分岐するということは、表現 R によって変換される部分空間 $V_R \in V_{\widetilde{R}}$ が存在する。この部分空間の基底の添え字として $i, j = 1, \ldots, \dim R$ を用いる。

$\dim \widetilde{R}$ 次元の表現空間の中に H 不変で表現 R によって変換される部分空間が存在することを意味している。そこでその $\dim R$ 個の方向のみを走る添え字に i, j を用いることにする。そのとき、R に分岐するすべての G の表現 $\widetilde{R}$ に対して

$$Y^{\widetilde{R}}_{i,A}(g) = \rho^{\widetilde{R}}(g^{-1})_{iA} \tag{105}$$

という関数を定義すれば、これは (104) を満足し、しかも完全系をなす。つまり、(104) を満足する関数 $\Psi_i(g)$ は (105) の線形結合として次のように与えられる。

$$\Psi_i(g) = \sum_{\widetilde{R}\supset R} \sum_{A=1}^{\dim \widetilde{R}} \rho^{\widetilde{R}}(g^{-1})_{iA} \Psi_A^{\widetilde{R}} \tag{106}$$

$\Psi_A^{\widetilde{R}}$ は定数係数である。ただし、一般には $\widetilde{R}$ が二つ以上の R を含むことがある。そのような場合には $\widetilde{R}$ についての和はことなる R 部分空間ごとにとる。(106) が (104) を満足することは簡単に示すことができる。

3.3 アイソメトリーとリー微分

G と $F\mathcal{M}$ の対応を見れば、$\mathcal{M}$ に対するアイソメトリーは g への右作用として次のように与えられる。

$$\mathrm{iso}(g')|g\rangle = |g'g\rangle. \tag{107}$$

従って、(102) に対してアイソメトリーを作用させると、波動関数の変換は

$$\begin{aligned}
\mathrm{iso}(g')|\Psi\rangle &= \int dg \sum_{i,\widetilde{R},A} |g'g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \rho^{\widetilde{R}}(g^{-1})_{iA} \Psi_A^{\widetilde{R}} \\
&= \int dg \sum_{i,\widetilde{R},A} |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \rho^{\widetilde{R}}(g^{-1}g')_{iA} \Psi_A^{\widetilde{R}}. \\
&= \int dg \sum_{i,\widetilde{R},A,B} |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \rho^{\widetilde{R}}(g^{-1})_{iA} \rho^{\widetilde{R}}(g')_{AB} \Psi_B^{\widetilde{R}}.
\end{aligned} \tag{108}$$

となる。すなわち、アイソメトリーは定数ベクトル $\Psi_A^{\widetilde{R}}$ に対する次のような回転として表わすことができる。

$$\Psi_A^{\widetilde{R}} \to \Psi_A'^{\widetilde{R}} = \rho^{\widetilde{R}}(g')_{AB} \Psi_B^{\widetilde{R}}. \tag{109}$$

アイソメトリーの生成子 X に対応するリー微分 $\mathcal{L}_X$ は、微小なアイソメトリーのもとでの場の変化として定義される。すなわち、

$$\mathcal{L}_X = \mathrm{iso}(1+X) - 1 \tag{110}$$

である。(108) を用いれば

$$\mathcal{L}_X \Psi_i(g) = \Psi_i((1+X)^{-1}g) - \Psi_i(g) = \Psi_i(-Xg). \tag{111}$$

である。

アイソメトリーの g への作用は左作用であるが、これを次のように右作用として表わそう。

$$(1+X)g = gg^{-1}(1+X)g = g(1+v^m K_m + w^a H_a) \tag{112}$$

このとき v^m が X に対するキリングベクトルを与える。$w^a H_a$ はアイソメトリーに付随する回転を表わす。

3.4 共変微分

$F\mathcal{M}$ の断面 f を一つ与える。これに基づいて、任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ の近傍の直交座標 ξ^a（$m = 1, \ldots, \dim \mathcal{M}$）を定義しよう。これは、$\xi^a$ から $\boldsymbol{x}$ の近傍への写像として次のように与えることができる。

$$\boldsymbol{x}(\xi) = \pi(g(1+\xi^m K_m)) \tag{113}$$

ここからは、添え字についての和の記号は省略することにする。H_a は $H \subset G$ の生成子、K_m はその直交補空間 $\mathcal{K} \equiv \mathcal{G} - \mathcal{H}$ の生成子である。H_a の作用は剰余類 eH を動かさないから、座標としては ξ^m を用いる。原点近傍での微小線素を

$$ds^2 = \xi^m \xi^m \tag{114}$$

と定義する。これは生成子 K_m の規格化の仕方に依存し、K_m の規格化が多様体 $\mathcal{M}$ の大きさの情報を含んでいる。

ある直交系を設定したときに、座標 ξ^m の点を座標 $\xi^m - \epsilon^m$ に動かすような平行移動は

$$g \to g(1-\epsilon^m K_m) \tag{115}$$

によって与えられる。この平行移動を P_ϵ と表わそう。

$$P_\epsilon |g\rangle = |g(1-\epsilon^m K_m)\rangle \tag{116}$$

P_ϵ を (102) に作用させると、

$$\begin{aligned} P_\epsilon|\Psi\rangle &= \int dg |g(1-\epsilon^m K_m)\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(g) \\ &= \int dg |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(g(1+\epsilon^m K_m)) \end{aligned} \tag{117}$$

この P_ϵ を用いると、共変微分は次のように定義することができる。

$$\begin{aligned} \epsilon^m D_m|\Psi\rangle &= P_\epsilon|\Psi\rangle - |\Psi\rangle \\ &= \int dg |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 [\Psi_i(g(1+\epsilon^m K_m)) - \Psi_i(g)] \end{aligned} \tag{118}$$

つまり、$D_m|\Psi\rangle$ の波動関数を $D_m\Psi_i$ と書くことにすれば、それは次のように与えられる。

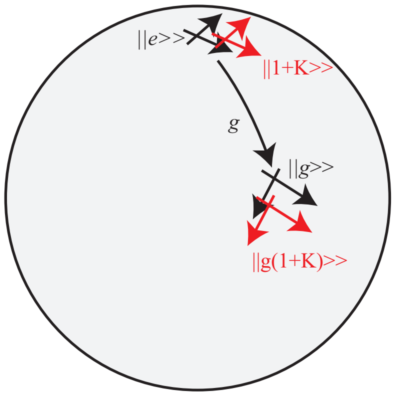

図 4:

$$D_m \Psi_i = \Psi_i(gK_m). \tag{119}$$

ただし、この式の右辺は、

$$\epsilon^m \Psi_i(gK_m) = \Psi_i(g(1+\epsilon^m K_m)) - \Psi_i(g) \tag{120}$$

によって定義される。波動関数が (106) のように展開されることを用いると、さらに簡単に表わすことができる。ここでは特に波動関数がアイソメトリーのもとで表現 $\tilde{R}$ に属し、つぎのように与えられるとしよう。

$$\Psi_i^{\tilde{R}}(g) = \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}} \tag{121}$$

このとき、(120) は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\Psi_i^{\tilde{R}}(g(1+\epsilon^m K_m)) - \Psi_i^{\tilde{R}}(g) &= [\rho^{\tilde{R}}((1-\epsilon^m K_m)g^{-1})_{iA} - \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA}]\Psi_A^{\tilde{R}} \\
&= \rho^{\tilde{R}}(-\epsilon^m K_m)_{iA} \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}} \\
&= \rho^{\tilde{R}}(-\epsilon^m K_m)_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}}(g)
\end{aligned} \tag{122}$$

ただし、(121) の R 添え字 i をそのまま $\tilde{R}$ へ拡張したものを $\Psi_A^{\tilde{R}}(g)$ とした。すなわち

$$\Psi_A^{\tilde{R}}(g) = \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}} \tag{123}$$

である。これを用いれば、

$$D_m \Psi_i^{\tilde{R}}(g) = \Psi_i^{\tilde{R}}(gK_m) = -\rho_{iA}^{\tilde{R}} \Psi_A^{\tilde{R}}(g). \tag{124}$$

これが条件 (104) を満足することは次のように確認できる。

$$D_m \Psi(gh) = \Psi_i(ghK_m) = \Psi_i(g(hK_m h^{-1})h) = h_{mn}^{-1} h_{ij}^{-1} \Psi_j(gK_n) = h_{mn}^{-1} h_{ij}^{-1} D_n \Psi_j(g). \tag{125}$$

共変微分の添え字 m もスピン添え字として変換されていることに注意。従って次の状態ベクトルが定義できる。

$$|D\Psi\rangle = \int dg|g\rangle \otimes_H (|m\rangle_0 \otimes |i\rangle_0) D_m \Psi_i(g) \tag{126}$$

ただし、ここでの $\otimes_H$ は次の同一視によって定義される。

$$|gh\rangle \otimes_H (|m\rangle_0 \otimes |i\rangle_0) \sim |g\rangle \otimes_H (h|m\rangle_0 \otimes h|i\rangle_0), \quad \forall h \in H. \tag{127}$$

微分を二回続けて作用させる場合には (124) を二回繰り返せばよい。すなわち

$$D_m D_n \Psi_i^{\widetilde{R}}(g) = D_m \Psi_i^{\widetilde{R}}(gK_n) = \Psi_i^{\widetilde{R}}(gK_m K_n) \tag{128}$$

である。

添え字 m と n を縮約すると、ラプラシアンに対する次の式が得られる。

$$\Delta \Psi_i(g) = \Psi_i(gK_m K_m) = -[C_2(\widetilde{R}) - C_2(R)]\Psi_i(g). \tag{129}$$

ただし、$C_2(\widetilde{R})$ は $K_m K_n$ の添え字をつぶした H 不変計量 δ^{mn} を G 不変計量 g^{AB} に拡張して定義した G のカシミア、$C_2(R)$ はその計量を H の生成子に制限して得られる計量を用いて定義した H のカシミアである。

$$C_2(\widetilde{R}) = -g^{AB} T_A T_B, \quad C_2(R) = -g^{ij} H_i H_j. \tag{130}$$

ここでは反エルミートな生成子を用いているので、カシミアが正になるように負号をつけて定義した。このように、ラプラシアンの固有値はスピン R とアイソメトリーのもとでの表現 $\widetilde{R}$ から完全に代数的に計算することができる。

(128) において二つの添え字を入れ替えたものを引けば、

$$[D_m, D_n]\Psi_i^{\widetilde{R}}(g) = \Psi_i^{\widetilde{R}}(g[K_m, K_n]) = \rho^R(-[K_m, K_n])_{ij}\Psi_i^{\widetilde{R}}(g) \tag{131}$$

となる。すなわち、曲率テンソルが次のように与えられる。

$$R_{mn} = [D_m, D_n] = -[K_m, K_n]. \tag{132}$$

3.5 スピン接続と多脚場

スピン接続と多脚場は、共変微分と微分を比較することによって得ることができる。共変微分が

$$e^m D_m \Psi_i = d\Psi_i + \omega_{ij}\Psi_j \tag{133}$$

と与えられるとしよう。右辺の微分を次のように書き換える。

$$d\Psi_i(g) = \Psi_i(dg). \tag{134}$$

ただし、$\Psi_i(dg)$ は波動関数が (106) のように与えられていることを仮定して、その中の $\rho^{\tilde{R}}(g^{-1})$ に対して微分が作用したものを表す。また、スピン接続の項は $\omega\Psi(g) = \Psi(-g\omega)$ のように書き換えることができる。さらに共変微分に対する式も用いると、

$$e^m\Psi_i(gK_m) = \Psi_i(dg) + \Psi_i(-g\omega) \tag{135}$$

これが任意の場に対して成り立たなければならないから、次の式が得られる。

$$\mu = e + \omega, \quad \mu := g^{-1}dg. \tag{136}$$

ただし $e = e^mK_m$ である。μ は定義より次の式を満足する。

$$d\mu + \mu^2 = 0. \tag{137}$$

ここに $\mu = e + \omega$ を代入し、H 成分と K 成分に分けると、次の二つの式を得る。

$$de + \omega e + e\omega = 0, \quad d\omega + \omega^2 + e^2 = 0. \tag{138}$$

一つ目の式は、捩率が 0 であることを表している。二つ目の式からは曲率テンソル (132) が得られる。

3.6 $\boldsymbol{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$

このノートでの計算に必要なのは

$$\mathcal{M} = \boldsymbol{S}^d, \quad G = SO(d+1), \quad H = SO(d) \tag{139}$$

の場合である。

3.7 $SU(2)$

$SU(2)$ の生成氏としては、反エルミートであり、次の交換関係に従うものを用いる。

$$[T_a, T_b] = -\epsilon_{abc}T_c. \tag{140}$$

スピノル表現とベクトル表現に対してのスピン演算子は次のように与えられる。

$$T_a^{(1/2)} = \frac{i}{2}\sigma_a, \quad (T_a^{(1)})_{bc} = \epsilon_{abc} \tag{141}$$

昇降演算子は次のように定義する。

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2 \tag{142}$$

一般のスピンの表現行列の要素は次の通り。反エルミートな生成子を用いているので成分が純虚数であることに注意。

$$
\begin{aligned}
\langle m|T_3|m\rangle =& im, \\
\langle m+1|T_+|m\rangle =& i\sqrt{(l-m)(l+m+1)}, \\
\langle m-1|T_-|m\rangle =& i\sqrt{(l+m)(l-m+1)}.
\end{aligned} \tag{143}
$$

$SO(N)$ の生成子としては、スピノル表現に対してディラック行列を用いて

$$
T_{MN} = \frac{1}{2}\gamma_{MN} \tag{144}
$$

と与えられるようなものを用いる。ベクトル表現の場合には、基底 $|M\rangle$ への作用が

$$
|1\rangle = T_{12}|2\rangle \tag{145}
$$

のようになる。$\mathbf{S}^3 = SO(4)/SO(3)$ によって $\mathbf{S}^3$ を定義するときに用いる部分群 $H = SO(3)$ としては $T_{12},\ T_{23}$ and T_{31} によって生成されるものを用いる。生成子 $\{T_{23}, T_{31}, T_{12}\}$ は $\{T_1, T_2, T_3\}$ と同じ交換関係を満たす。従って、

$$
T_{12} = T_3^L + T_3^R, \tag{146}
$$

などの関係が成り立つ。残りの生成子 T_{m4} の分解の符号は、左巻きと右巻きのスピノルにそれぞれ $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ が作用するように定義する。たとえば T_{34} は

$$
T_{34} = \frac{1}{2}\gamma^{34} = \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^{12} = \frac{1}{2}(P_L\gamma^{12} - P_R\gamma^{12}). \tag{147}
$$

従って、次の関係式が成り立つ。

$$
T_{34} = T_3^L - T_3^R. \tag{148}
$$

3.8 $\mathbf{S}^3$ の場合

$SO(4)$ の元は (g_l, g_r) のように二つの $SU(2)$ の元の組として表わすことができ、H はその対角部分群である。従って、一般の場は次のように表現することができる。

$$
|\Psi\rangle = |g_l, g_r\rangle|i\rangle\Psi_i(g_l, g_r). \tag{149}
$$

スピンと局所回転は次のように作用する。

$$
\mathrm{spin}(h)|\Psi\rangle = |g_l, g_r\rangle h|i\rangle\Psi_i(g_l, g_r). \tag{150}
$$

$$
\mathrm{local}(h)|\Psi\rangle = |g_l h, g_r h\rangle|i\rangle\Psi_i(g_l, g_r). \tag{151}
$$

従って、常に次の関係式が成り立つ。

$$|g_l, g_r\rangle h|i\rangle\Psi_i(g_l, g_r) = |g_l h, g_r h\rangle|i\rangle\Psi_i(g_l, g_r). \tag{152}$$

あるいは、波動関数を省略して、次のゲージ対称性があるとみなすこともできる。

$$|g_l, g_r\rangle h|i\rangle \sim |g_l h, g_r h\rangle|i\rangle \tag{153}$$

記号 $\sim$ はゲージ等価であることを意味する。無限小変換に対しては

$$|g_l T_m, g_r\rangle|i\rangle + |g_l, g_r T_m\rangle|i\rangle \sim |g_l, g_r\rangle T_m|i\rangle. \tag{154}$$

である。

$\mathbf{S}^3$ 上のスカラー関数については、スピン基底 $|i\rangle$ が自明であり、次の関係が成り立つ。

$$|g_l h, g_r h\rangle|0\rangle \sim |g_l, g_r\rangle|0\rangle. \tag{155}$$

この関係式を満足するスカラー関数の一般形は

$$|\Psi\rangle = |g_l, g_r\rangle\rho^j(g_l g_r^{-1})_{AB}\Psi_{AB} \tag{156}$$

である。ただし ρ^j はスピン j の表現行列であり、この関数はアイソメトリーのもとで (j, j) 表現として変換される。スカラー関数を扱う場合には基底 $|g_l, g_r\rangle$ の代わりに

$$||g_l g_r^{-1}\rangle\rangle = \{|g_l, g_r\rangle\} \tag{157}$$

を用いるのが便利である。ただし右辺は等価関係 (155) によって定義された同値類である。スカラー場を表わすには、枠を指定する必要がないので、この同値類を与えるだけで十分である。スカラー関数の一般形は

$$|\Psi\rangle = ||g\rangle\rangle\rho^j(g)_{AB}\Psi_{AB} \tag{158}$$

である。

一般のスピンをもつ場に対しても基底 $||g\rangle\rangle$ を用いることができるが、枠を指定するゲージ固定条件を導入する必要がある。たとえば、左不変枠および右不変枠は次のように与えられる。

$$||g\rangle\rangle_{LI} = |g, e\rangle, \quad ||g\rangle\rangle_{RI} = |e, g^{-1}\rangle. \tag{159}$$

リー微分や共変微分は一般にこれらのゲージを尊重しない。その場合にはそれを補ってもとのゲージに戻すようなゲージ変換を行う必要がある。

たとえば、左不変枠を用いた場合、リー微分および共変微分は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(T_m,0)}||g\rangle\rangle_{LI}|i\rangle =& |T_m g, e\rangle|i\rangle = ||T_m g\rangle\rangle_{LI}|i\rangle,\\
\mathcal{L}_{(0,T_m)}||g\rangle\rangle_{LI}|i\rangle =& |g_l, T_m\rangle|i\rangle \sim -||gT_m\rangle\rangle_{LI}|i\rangle + ||g\rangle\rangle_{LI}T_m|i\rangle.\\
rD_m||g\rangle\rangle_{LI}|i\rangle =& -|gT_m, e\rangle|i\rangle + |g, T_m\rangle|i\rangle \sim -2||gT_m\rangle\rangle_{LI}|i\rangle + ||g\rangle\rangle_{LI}T_m|i\rangle.
\end{aligned} \tag{160}$$

$\mathcal{K}$ の生成子を

$$K_m = \frac{1}{r}(T^l_m - T^r_m) \tag{161}$$

と定義した。$||g\rangle\rangle_{LI}$ は、スカラー関数を与えていると考えている。そこでこの部分を軌道部分、$|i\rangle$ の部分をスピン部分と見なし、$||g\rangle\rangle_{LI}$ へのアイソメトリーの作用を軌道角運動量 L^l_m および L^r_m、$|i\rangle$ への作用をスピン演算子 S_m と同定する。すると、全角運動量と共変微分がこれらを用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} J^l_m \overset{LI}{=} & L^l_m, \\ J^r_m \overset{LI}{=} & L^r_m + S_m, \\ rD_m \overset{LI}{=} & 2L^r_m + S_m. \end{aligned} \tag{162}$$

同様に、右不変枠に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(T_m,0)}||g\rangle\rangle_{RI}|i\rangle =& |T_m, g^{-1}\rangle|i\rangle \sim ||T_m g\rangle\rangle_{RI}|i\rangle + ||g\rangle\rangle_{RI}T_m|i\rangle, \\ \mathcal{L}_{(0,T_m)}||g\rangle\rangle_{RI}|i\rangle =& |e, T_m g^{-1}\rangle|i\rangle \sim -||gT_m\rangle\rangle_{RI}|i\rangle. \\ rD_m||g\rangle\rangle_{RI}|i\rangle =& -|T_m, g^{-1}\rangle|i\rangle + |e, g^{-1}T_m\rangle|i\rangle \sim -2||T_m g\rangle\rangle_{RI}|i\rangle - ||g\rangle_{RI}T_m|i\rangle. \end{aligned} \tag{163}$$

となり、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} J^l_m \overset{RI}{=} & L^l_m + S_m, \\ J^r_m \overset{RI}{=} & L^r_m, \\ rD_m \overset{RI}{=} & -2L^l_m - S_m. \end{aligned} \tag{164}$$

これらを用いると、ラプラシアンを次のように変形することができる。ここでは左不変枠を用いて計算しよう。

$$\begin{aligned} r^2 D_m D_m =& (2L^r_m + S_m)^2 \\ =& 2(L^r_m)^2 + 2(L^r_m + S_m)^2 - S^2_m \end{aligned} \tag{165}$$

二回目の共変微分に含まれるスピン演算子は一回目の共変微分の添え字にも作用するがベクトル表現の生成子が ϵ_{abc} であり、その添え字が反対称であることから、結果に影響を与えない。さらに、$(L^r_m)^2 = (L^l_m)^2$ を用いれば、次の式を得ることができる。

$$r^2 D_m D_m = 2(J^l_m)^2 + 2(J^r_m)^2 - S^2_m \tag{166}$$

最後の式は、右不変枠を用いても同じになる。この式は、スピンとアイソメトリーのもとでの量子数からラプラシアンの固有値を与えるものである。

一般化したディラック演算子を次のように定義する。

$$\mathcal{D} := S_m r D_m \tag{167}$$

再び左不変枠を用いればこれは次のように変形できる。

$$\mathcal{D} = S_m(2L^r_m + S_m) = (S_m + L^r_m)^2 - (L^r_m)^2. \tag{168}$$

さらに $(L^r_m)^2 = (L^l_m)^2$ を用いれば、

$$\mathcal{D} = (J^r_m)^2 - (J^l_m)^2. \tag{169}$$

が得られる。この式はどのような枠を用いるかには依存しない。

スピノル場 $X^{(1/2)}$ とベクトル場 $X^{(1)}$ に対しては

$$\mathcal{D}X^{(1/2)} = \frac{ir}{2}\sigma_a D_a X^{(1/2)}, \quad \mathcal{D}X^{(1)}_a = -r\epsilon_{abc} D_b X^{(1)}_c \tag{170}$$

のように、ディラック演算子と回転に比例していることがわかる。従って、次の公式が得られる。

$$\sigma_a D_a X^{(1/2)} = \frac{2i}{r}[(J^l_m)^2 - (J^r_m)^2]X^{1/2}, \quad \epsilon_{abc} D_b X_c = \frac{1}{r}[(J^l_m)^2 - (J^r_m)^2)X_a \tag{171}$$

ベクトル場は必ず $(j+1, j)$, (j, j), $(j-1, j)$ のいずれかの表現に属する。それぞれに対して

$$\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{X}_{(j+1,j)} = -\frac{2(j+1)}{r}\boldsymbol{X}_{(j+1,j)}, \quad \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{X}_{(j,j)} = 0, \quad \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{X}_{(j-1,j)} = \frac{2j}{r}\boldsymbol{X}_{(j-1,j)}. \tag{172}$$

スピノル場は $(j+1/2, j)$ または $(j-1/2, j)$ に属する。

$$\not{D} X_{(j+\frac{1}{2},j)} = -\frac{2i(j+\frac{3}{4})}{r}X_{(j+\frac{1}{2},j)}, \quad \not{D} X_{(j-\frac{1}{2},j)} = \frac{2i(j+\frac{1}{4})}{r}X_{(j-\frac{1}{2},j)}. \tag{173}$$