

超重力理論についてのノート（Ⅰ）

今村 洋介

2009 年

概要

4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論の作用の構成法についてのノートです。計算間違いがあったら教えてください。

目次

第 I 部	4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論	4
第 1 章	大域的超対称性	5
1.1	超場形式	5
1.2	カイラル超場	11
1.3	積の公式	14
1.4	超対称不変な作用	16
1.5	スカラー多様体	17
1.6	テンソル計算法	20
1.7	ゲージ多重項	22
1.7.1	超空間上のゲージ場	22
1.7.2	プレポテンシャルとカイラルゲージ変換	27
1.7.3	Wess-Zumino ゲージ	29
1.7.4	Fayet-Iliopoulos 項	30
1.8	アイソメトリー	31
1.9	ゲージ場が存在する場合のスカラー多様体上の共変性	38
1.10	カレント	41
第 2 章	成分形式	50
2.1	単純超重力理論	50
2.2	ポテンシャル項	59
2.3	ゲージ多重項も含むラグランジアン	61
第 3 章	超場形式	69
3.1	多脚場、捩率、曲率	69
3.2	対称性	73
3.3	拘束条件	74
3.4	ビアンキ恒等式の解	79
3.5	重力多重項	82
3.6	カイラル射影演算子	85
3.7	ゲージ多重項	88

3.8	超空間上の不変積分	91
3.9	正規座標	96
3.10	カイラル密度	101
3.11	超重力理論の作用の例 (1)	103
3.11.1	単純超重力理論	103
3.11.2	カイラル多重項と重力の結合	104
3.11.3	ゲージ場の運動項と重力の結合	105
3.12	超空間の変形と運動方程式	106
3.13	超ワイル変換	110
3.14	超対称ゲージ理論と重力の結合	113
3.15	超重力理論の作用の例 (2)	115
3.16	$U(1)$ 超空間	116
3.16.1	ピアンキ項等式	116
3.16.2	カイラル密度	120
3.17	超重力理論の作用の例 (3)	123
3.17.1	FI パラメータを含む理論	123
3.17.2	カイラル多重項と重力の結合	123
第 4 章	テンソル計算法	126
4.1	ゲージ変換と一般座標変換	126
4.2	代数の変形	129
4.3	超コンフォーマル代数	132
4.4	拘束条件と変換則の補正	136
4.5	変形された代数	141
4.6	曲率テンソルの関係式	142
4.7	物質場の導入	144
4.8	超対称不変な作用積分	148
4.9	ゲージ多重項	150
4.10	超共形重力理論	153
4.11	大域的共形対称性	156
4.12	ポアンカレ超重力理論	157
4.13	超ワイル変換と補正場	162
付 録 A	表記法など	164
A.1	添え字について	164
A.2	スピノル	165

付録 B	主な文献との対応表	169
B.1	2 成分表示	169
B.2	4 成分表示	171
付録 C	計算の詳細	173
C.1	$D_{\bar{\alpha}} P_{\text{chiral}} D^{\bar{\alpha}}$ 演算子について	173
C.2	変換則の導出	174
C.3	$P_{\text{chiral}} X$ の成分場	175
C.4	超場形式における D 項作用 (3.177) の導出	177
C.5	テンソル計算法における D 項作用 (4.139) の導出	180
C.6	ゲージ場の運動項 (3.241) の導出	183

第I部

4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論

第1章 大域的超対称性

1.1 超場形式

2次元の場の理論 (dual model) において提案されていた超対称性にアイデアを得て、Wess と Zumino は 4次元時空における超対称性を持つ理論を初めて構成した [13]。(正確には、この論文で議論されているのは $\mathcal{N} = 1$ 超共形対称性である。)この論文では、4次元の大域的超対称性のもとで不変な作用を構成するのに必要なことがほぼ全て与えられている。すなわち、基本となる多重項 (カイラル多重項、ベクトル多重項) と、それらの積を取るルールが与えられ、また、カイラル多重項の F 成分とベクトル多重項の D 成分が表面項を除き超対称不変であり、超対称ラグランジアンとして採用できることが述べられている。そのような処方を用いて、彼らはカイラル多重項およびベクトル多重項の自由場の作用を与え、相互作用を持つモデルも [15] において具体的に構成している。これらの構成法では、多重項を成分場の集合として扱うテンソル計算法 (tensor calculus) の方法が取られていた。その後まもなくこれを簡単化する「超場形式」が Salam と Strathedee によって提案された。[7] 以下ではこの超場形式を用いた作用、超対称変換則の構成法について簡単に述べる。

平坦な 4次元ミンコフスキー時空上の大域的な超対称性は次の超ポアンカレ代数によって定義される。

$$\begin{aligned} [M_{mn}, M_{pq}] &= M_{mq}\eta_{np} - M_{mp}\eta_{nq} - M_{nq}\eta_{mp} + M_{np}\eta_{mq}, \\ [M_{mn}, P_p] &= P_m\eta_{np} - P_n\eta_{mp}, \\ [P_m, P_n] &= 0, \\ [P_m, Q_a] &= 0, \\ [M_{mn}, Q_a] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{mn})_a{}^b Q_b, \\ \{Q_a, Q_b\} &= -2(\gamma^m)_{ab} P_m. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ただし、(1.1) に現れる M, P, Q は場に作用する変換記号であると解釈する。このような代数の表現を構成する効率的な方法は変換 P と Q が「並進対称性」として実現できるような空間を定義し、これらの変換をその上の微分演算子として実現するものである。そのような空間として P と Q で生成される群多様体を用いることができ

る。 P と Q で生成される超ポアンカレ群の元を

$$g(x^m, \theta^a) = \exp(x^m P_m + \theta^a Q_a) \quad (1.2)$$

と置こう。左から微小変換 $\epsilon^m P_m + \xi^a Q_a$ を作用させたものは、超空間の座標 (x^m, θ^a) に作用する微分演算子 \tilde{P}_m と \tilde{Q}_a を用いて

$$(\epsilon^m P_m + \xi^a Q_a)g(x^m, \theta^a) = (\epsilon^m \tilde{P}_m + \xi^a \tilde{Q}_a)g(x^m, \theta^a) \quad (1.3)$$

のように書き換えることができる。上記の交換関係を用いると、微分演算子の具体形が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m &= \partial_m, \\ \tilde{Q}_a &= \partial_a + (\gamma^m)_{ab} \theta^b \partial_m. \end{aligned} \quad (1.4)$$

これは $g(x^m, \theta^a)$ に対する微小変換を生成するが、超空間上の一般の超場 $V(x^m, \theta^a)$ に対しても

$$(\epsilon^m P_m + \xi^a Q_a)V(x^m, \theta^a) = (\epsilon^m \tilde{P}_m + \xi^a \tilde{Q}_a)V(x^m, \theta^a) \quad (1.5)$$

によって P 変換と Q 変換を定義することにより、 V の上でも超ポアンカレ代数を成り立たせることができる。

代数の生成子 P_m 、 Q_a と微分演算子 \tilde{P}_m 、 \tilde{Q}_a は同じ交換関係を満足しないことに注意しよう。一般に、(反)交換関係

$$O_X O_Y - (-)^{XY} O_Y O_X = f_{XY}{}^Z O_Z \quad (1.6)$$

を満足する graded 代数の生成子 O_X に対応する微分演算子を \tilde{O}_X とするとき、 \tilde{O}_X のなす交換関係は

$$\tilde{O}_X \tilde{O}_Y - (-)^{XY} \tilde{O}_Y \tilde{O}_X = -f_{XY}{}^Z \tilde{O}_Z \quad (1.7)$$

のように (1.6) とは負号が逆転する。この理由は、複数の変換が連続して場に作用したとき、それを微分演算子で書き換えると、

$$O_X O_Y V = O_X \tilde{O}_Y V = (-)^{XY} \tilde{O}_Y O_X V = (-)^{XY} \tilde{O}_Y \tilde{O}_X V \quad (1.8)$$

のように順序が入れ替わるためである。

回転 M を微分演算子として表すためには、上で与えた超空間の定義 (P と Q によって生成される超ポアンカレ群の部分群) を少し変形して、超ポアンカレ群 G のローレンツ群 H による右商集合として定義すればよい。超ポアンカレ群の元は (1.2) で定義した $g(x^m, \theta^a)$ を用いて

$$g(x^m, \theta^a, \phi^{mn}) = g(x^m, \theta^a) \exp\left(\frac{1}{2} \phi^{mn} M_{mn}\right) \quad (1.9)$$

と与えることができる。そして M によって生成されるローレンツ群 H による右商集合は、単に ϕ^{mn} という座標を無視することを意味する。(1.9) に対する P と Q の左作用は以前と同じ微分演算子 \tilde{P} と \tilde{Q} を用いて (1.3) によって与えられる。また M の左作用は、商集合の上では微分演算子 \tilde{M} を用いて次のように書き換えることができる。

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^{mn}M_{mn}\right)g(x^m,\theta^a) = \frac{1}{2}\sigma^{mn}\tilde{M}_{mn}g(x^m,\theta^a) + g(x^m,\theta^a)\left(\frac{1}{2}\sigma^{mn}M_{mn}\right) \quad (1.10)$$

右辺第 2 項は右商集合においては無視できる項である。微分演算子 \tilde{M}_{mn} は次のように与えられる。

$$\tilde{M}_{mn} = -(x_m\partial_n - x_n\partial_m) - \frac{1}{2}\theta^b(\gamma_{mn})_b{}^a\partial_a \quad (1.11)$$

超対称変換を超空間上の場ではなく、通常のミンコフスキー時空上の場の変換則として与えるには、超場 V をスピノル座標 θ で展開することにより成分場を定義し、変換則 (1.5) を成分場に対する変換に読み替えればよい。グラスマン数は同じものを二つ以上かけると 0 になるので、 θ による展開は有限項で終わる。ここでは次のように成分場を定義する。

$$\begin{aligned} V = & B + (\theta_L\eta_L) + C(\theta_L\theta_L) \\ & + (\theta_R\eta_R) + i(\theta_L\gamma^m\theta_R)v_\mu + i(\theta_L\theta_L)(\theta_R\lambda'_R) \\ & + C^*(\theta_R\theta_R) - i(\theta_R\theta_R)(\theta_L\lambda'_L) + \frac{1}{2}(\theta_L\theta_L)(\theta_R\theta_R)D' \end{aligned} \quad (1.12)$$

ここでは V は複素超場でよい。その場合 C と C^* は互いに複素共役ではない独立な複素場であり、 η_L と η_R 、 λ'_L と λ'_R も互いに独立なワイルスピノルになる。 $V = V^*$ を満足する実ベクトル超場の場合にはこれらの対は互いに複素共役になる。成分場 λ'_L 、 λ'_R 、 D' にプライムを付けたのは、このすぐ後に導入される、より便利な成分場の定義と区別するためである。

それぞれの成分場は、微分演算子を用いて次のように抜き出すことができる。

$$\begin{aligned} V|_{\theta=0} &= B, \\ \partial_a V|_{\theta=0} &= \eta_a, \\ \frac{1}{4}\partial_{\bar{a}}\partial^{\bar{a}}V|_{\theta=0} &= C, \\ \frac{1}{4}\partial_{\underline{a}}\partial^{\underline{a}}V|_{\theta=0} &= C^*, \\ \partial_{\bar{a}}\partial_{\underline{b}}V|_{\theta=0} &= i(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}}v_m, \\ \frac{1}{4}\partial_{\bar{b}}\partial^{\bar{b}}\partial_{\underline{a}}V|_{\theta=0} &= i\lambda'_{\underline{a}}, \\ \frac{1}{4}\partial_{\underline{b}}\partial^{\underline{b}}\partial_{\bar{a}}V|_{\theta=0} &= -i\lambda'_{\bar{a}}, \\ \frac{1}{4}\partial_{\bar{a}}\partial_{\underline{b}}\partial^{\underline{b}}\partial^{\bar{a}}V|_{\theta=0} &= 2D'. \end{aligned} \quad (1.13)$$

展開式 (1.12) に対して微分演算子 $\xi^a \tilde{Q}_a$ を作用させることにより、それぞれの成分場の超対称変換 $\delta_Q = \xi^a Q_a$ は次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\delta_Q B &= \xi \eta, \\
\delta_Q \eta_L &= \gamma^m \xi_R \partial_m B + 2C \xi_L + i \lambda \xi_R, \\
\delta_Q \eta_R &= \gamma^m \xi_L \partial_m B + 2C^* \xi_R - i \lambda \xi_L, \\
\delta_Q C &= \frac{1}{2} \xi_R \not{\partial} \eta_L + i \xi_R \lambda'_R, \\
\delta_Q C^* &= \frac{1}{2} \xi_L \not{\partial} \eta_R - i \xi_L \lambda'_L, \\
\delta_Q v_m &= -\frac{i}{2} \xi \gamma_5 \gamma^k \gamma_m \partial_k \eta + \xi \gamma_m \lambda', \\
\delta_Q \lambda'_L &= i \gamma^m \xi_R \partial_m C^* + \frac{1}{2} \gamma^m \gamma^n \xi_L \partial_n v_m + i \xi_L D', \\
\delta_Q \lambda'_R &= -i \gamma^m \xi_L \partial_m C + \frac{1}{2} \gamma^m \gamma^n \xi_R \partial_n v_m - i \xi_R D', \\
\delta_Q D' &= i \xi \gamma_5 \gamma^m \partial_m \lambda'.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

展開式 (1.12) に対して微分演算子 $\xi^a \tilde{Q}_a$ を作用させる方法は、全ての成分場の変換則を一度に与える。どれか一つの成分場についてのみ変換則を得たい場合には、変換則の式 (1.5) に (1.13) のように微分演算子を作用させることでほしい成分を抜き出せばよい。

P 変換や M 変換のもとでの変換則も同様得ることができる。 P 変換 $\delta_P = \epsilon^m P_m$ は任意の成分場に対して同じ変換則

$$\delta_P \phi = \epsilon^m \partial_m \phi \tag{1.15}$$

を与える。 M 変換則 $\delta_M = (1/2) \sigma^{mn} M_{mn}$ については (1.11) を用いることにより

$$\begin{aligned}
\delta_M B &= -\sigma^{mn} x_m \partial_n B, \\
\delta_M \eta &= -\sigma^{mn} x_m \partial_n \eta - \frac{1}{4} \sigma^{mn} \gamma_{mn} \eta, \\
\delta_M v_k &= -\sigma^{mn} x_m \partial_n v_k - \sigma_{kl} v^l.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

が得られる。 M 変換は場のスピンのみに依存するので、 C 、 C^* 、 D は B と、 λ は η と同様に変換される。

超空間上の共変微分演算子は超対称変換を与える微分演算子 \tilde{Q}_α と反可換な微分演算子として次のように定義される。

$$D_a = \partial_a - (\gamma^m)_{ab} \theta^b \partial_m \tag{1.17}$$

この微分演算子は次の反交換関係を満足する。

$$\{D_a, D_b\} = -2(\gamma^m)_{ab} \partial_m, \quad \{D_a, \tilde{Q}_b\} = 0. \tag{1.18}$$

微分演算子 D_a と \tilde{Q}_a の幾何学的な意味について少し述べておこう。あとで超重力理論を扱う場合には、 $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha)$ を座標とする超空間上に多脚場 E_M^A やスピン接続 $\Omega_M^A{}_B$ を導入する。ここでは、大域的な超対称性を記述するような平坦な超空間についてのみ考える。この場合スピン接続は 0 である。しかし注意しなければならないのは、超空間上では一般に捩率が 0 ではないという点である。

二つの超対称変換に対するベクトル場を V および V' と置こう。すなわち

$$\xi^a \tilde{Q}_a = V^M \partial_M, \quad \xi'^a \tilde{Q}_a = V'^M \partial_M. \quad (1.19)$$

このとき、これがアイソメトリーである、すなわち、生成する座標変換が多脚場を変化させないための条件は

$$\delta E_M^A = D_M V^A + V^N T_{NM}^A = 0. \quad (1.20)$$

V' についても同様である。これを用いると、

$$[\xi \tilde{Q}, \xi' \tilde{Q}] = [V^M (\partial_M V'^N) + V'^M (\partial_M V^N)] \partial_N = -V^M V'^K T_{KM}^N \partial_N \quad (1.21)$$

この右辺が $(2\xi\gamma^m\xi')\partial_m$ に等しくなければならないから、捩率は 0 ではあり得ない。捩率は、多脚場を用いて $T^A = DE^A$ によって定義されるが、捩率が 0 で無いということは、超空間上の多脚場は定数ではなく、座標依存性を持つことを意味している。この依存性は、上記の共変微分の形から読み取ることができる。共変微分に対応するベクトル場を X とする。すなわち

$$\epsilon^a D_a = X^M \partial_M \quad (1.22)$$

によってベクトル X^M を定義する。 D_a が Q_a と可換であるということは、ベクトル X^M が V^M によって生成される座標変換で不変であること、すなわち

$$\delta X^A = V^M D_M X^A \quad (1.23)$$

が成り立つことを意味している。スピン接続は 0 であるから、 X^A が座標に依存しない定数であればこの条件は満足される。この定数を (1.22) に現れたパラメータ ϵ^a と同一視すれば、 $X^M = \epsilon^a E_a^M$ であり、共変微分演算子は多脚場を用いて次のように与えることができる。

$$D_a = E_a^M \partial_M. \quad (1.24)$$

これだけではなく、 x^m 座標に対する並進演算子 $\tilde{P}_m = \partial_m$ も \tilde{Q} と可換であるから、同様の考察から次のように与えることができる。

$$\partial_m = E_m^M \partial_M. \quad (1.25)$$

共変微分的具体形 (1.17) を用いると、多脚場の成分は次のように決まる。

$$E_a^\beta = \delta_a^\beta, \quad E_a^\mu = (\gamma^\mu \theta)_a, \quad E_m^\beta = 0, \quad E_m^\mu = \delta_m^\mu. \quad (1.26)$$

この逆行列も与えておこう。

$$E_\alpha^b = \delta_\alpha^b, \quad E_\alpha^m = -(\gamma^m \theta)_\alpha, \quad E_\mu^b = 0, \quad E_\mu^m = \delta_\mu^m. \quad (1.27)$$

あるいは、微分形式で表せば、

$$E^m = dx^\mu + d\theta^a (\gamma^m)_{ab} \theta^b, \quad E^a = d\theta^a. \quad (1.28)$$

以下の計算では、このような多脚場を用いた表示は必要ではなく、微分演算子の具体形 (1.17) だけを知っておけば十分である。しかし、 ∂_α と D_a のそれぞれのスピノル添え字が幾何学的に異なるものであること（前者は大域座標の添え字であり、後者は局所座標の添え字であること）を押さえておくことは、超空間上の共変性を議論する際に必要である。

上記の多脚場を用いて換率を求めると、 $T_{MN}{}^A$ および $T_{BC}{}^A$ の成分のうち 0 でないのは、つぎのものだけである。

$$T_{\alpha\beta}{}^m = 2(\gamma^m)_{\alpha\beta}, \quad T_{ab}{}^m = 2(\gamma^m)_{ab} \quad (1.29)$$

上で述べたように、換率のこの成分は Q 同士の反交換関係が P になることを表している。

成分場の定義 (1.13) を、共変微分を用いた次のものに置き換えるのもしばしば便利である。

$$\begin{aligned} V|_{\theta=0} &= B, \\ D_a V|_{\theta=0} &= \eta_a, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} V|_{\theta=0} &= C, \\ \frac{1}{4} D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} V|_{\theta=0} &= C^*, \\ \frac{1}{2} [D_{\bar{a}}, D_{\underline{b}}] V|_{\theta=0} &= i(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}} v_m, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{b}} D^{\bar{b}} D_{\underline{a}} V|_{\theta=0} &= i\lambda_{\underline{a}}, \\ \frac{1}{4} D_{\underline{b}} D^{\underline{b}} D_{\bar{a}} V|_{\theta=0} &= -i\lambda_{\bar{a}}, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D_{\underline{b}} D^{\underline{b}} D^{\bar{a}} V|_{\theta=0} &= 2D. \end{aligned} \quad (1.30)$$

共変微分を用いて成分場を定義する際には、微分の順序に気をつけなければならない。最後の D の定義において、微分の順序をこのように取ったのは次の式が成り立つからである。

$$D_{\bar{a}} D_{\underline{b}} D^{\underline{b}} D^{\bar{a}} V = D_{\underline{a}} D_{\bar{b}} D^{\bar{b}} D^{\underline{a}} V \quad (1.31)$$

この関係式のおかげで、超場 V が実であるときに成分場 D も実になる。以前の定義と異なるのは次の成分のみである。

$$\begin{aligned}
 \lambda'_L &= \lambda_L + \frac{i}{2}\gamma^m \partial_m \eta_R, \\
 \lambda'_R &= \lambda_R - \frac{i}{2}\gamma^m \partial_m \eta_L, \\
 D' &= D + \frac{1}{2}\partial_m \partial^m B.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

上記のように共変微分を用いて成分場を定義しておくと、成分場の超対称変換を微分演算子 \tilde{Q}_α を用いずに共変微分だけで表すことができる。すなわち、ある成分場が $\phi = D \cdots DV|_{\theta=0}$ と与えられたときに、その超対称変換が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \delta_Q \phi &= D \cdots D \delta_Q V|_{\theta=0} \\
 &= D \cdots D \xi^a \tilde{Q}_a V|_{\theta=0} \\
 &= \xi^a \tilde{Q}_a D \cdots DV|_{\theta=0} \\
 &= \xi^a D_a D \cdots DV|_{\theta=0}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

\tilde{Q}_a が共変微分と反可換であることと、 $\theta = 0$ では \tilde{Q}_a と D_a が一致することを用いた。

変換則も λ および D を用いて書いたものを改めて与えておこう。

$$\begin{aligned}
 \delta_Q B &= \xi \eta, \\
 \delta_Q \eta_L &= \gamma^m \xi_R \partial_m B + 2C \xi_L + i\lambda \xi_R, \\
 \delta_Q \eta_R &= \gamma^m \xi_L \partial_m B + 2C^* \xi_R - i\lambda \xi_L, \\
 \delta_Q C &= \xi_R \not{\partial} \eta_L + i \xi_R \lambda_R, \\
 \delta_Q C^* &= \xi_L \not{\partial} \eta_R - i \xi_L \lambda_L, \\
 \delta_Q v_m &= -i \xi \gamma_5 \partial_m \eta + \xi \gamma_m \lambda, \\
 \delta_Q \lambda_L &= -\frac{1}{2} \gamma^{mn} \xi_L F_{mn} + i \xi_L D, \\
 \delta_Q \lambda_R &= -\frac{1}{2} \gamma^{mn} \xi_R F_{mn} - i \xi_R D, \\
 \delta_Q D &= i \xi \gamma_5 \gamma^m \partial_m \lambda.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

ただし、 F_{mn} は次のように定義される。

$$F_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m. \tag{1.35}$$

1.2 カイラル超場

超場 V は超対称代数の表現を与えるが、それは規約表現というわけではなく、適当な拘束条件を課すことによってより小さな、基本的表現を定義することができる [17]。

一般のスピンを持つ超場の場合に超場からその既約成分を取り出すためにどのような拘束条件を課せば良いかということは [18] で詳しく論じられている。

カイラル超場は次の拘束条件によって定義される [3]。

$$D_{\underline{a}}\Phi = 0 \quad (1.36)$$

D_a は超対称変換と可換であるから、この拘束条件は超対称変換によって保たれる。従って、この条件を満足する超場は超対称多重項を与え、カイラル多重項と呼ばれる。

カイラル超場を扱う場合、次のユニタリー変換を用いると便利である。

$$U = \exp(\theta_L \gamma^m \theta_R \partial_m) \quad (1.37)$$

微分演算子 D_a はこれを用いて次のように表すことができる。

$$D_{\underline{a}} = U \partial_{\underline{a}} U^{-1} \quad (1.38)$$

このユニタリー変換によって定義される新たな超空間座標は、ポアンカレ群の元を生成子を用いて表す際に (1.2) の代わりに

$$\exp(x^m P_m + \theta_L Q_L) \exp(\theta_R Q_R) \quad (1.39)$$

を用いることに対応している [3]。このユニタリー変換を用いればカイラル条件 (1.36) を満足する超場 Φ を次のように与えることができる。

$$\Phi(\theta) = U \Phi'(\theta_L) \quad (1.40)$$

ただし、 Φ' は座標 θ の片方のカイラリティの部分 θ_L にのみ依存する関数である。

(1.36) によって定義されるカイラル超場の成分場 (ϕ, χ, F) を次の展開によって定義する。

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= U(\phi + \theta_L \chi_L + F \theta_L \theta_L) \\ &= \phi + \theta_L \chi_L + F \theta_L \theta_L \\ &\quad + (\theta_L \gamma^m \theta_R) \partial_m \phi + \frac{1}{2} (\theta_L \theta_L) (\theta_R \gamma^m \partial_m \chi_L) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\theta_L \theta_L) (\theta_R \theta_R) \partial_m \partial^m \phi \end{aligned} \quad (1.41)$$

これら成分場は微分演算子を用いて次のように抜き出すことができる。

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi|_{\theta=0}, \\ \chi_{\bar{a}} &= \partial_{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0} = D_{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0}, \\ F &= \frac{1}{4} \partial_{\bar{a}} \partial^{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0} = \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

θ を含む項は $\theta = 0$ で落ちることを考慮すると、カイラル超場に対してはその成分場の定義に用いる微分演算子としてただの微分を用いても共変微分を用いても同じであることがわかる。

カイラル超場は複素ベクトル超場の特殊な場合であり、複素ベクトル超場において次の関係を代入すればカイラル超場が得られる。

$$\begin{aligned}
B &= \phi, \\
\eta_L &= \chi_L, \\
C &= F, \\
v_m &= i\partial_m\phi, \\
C^* = \eta_R = \lambda_L = \lambda_R = D &= 0.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

成分場 (ϕ, χ, F) に対する超対称変換は、複素ベクトル超場についてやった手順を繰り返しても良いし、関係式 (1.43) を用いて複素ベクトル超場の成分場の変換則から読み取ってもよい。

$$\begin{aligned}
\delta_Q\phi &= \xi_L\chi_L, \\
\delta_Q\chi_L &= 2\gamma^m\xi_R\partial_m\phi + 2F\xi_L, \\
\delta_QF &= \xi_R\gamma^m\partial_m\chi_L.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

θ_R は成分を二つしか持たないから、3 つ以上の θ_R の積は 0 である。同じ理由で、微分 $\partial_{\underline{a}}$ を 3 回以上続けて任意の超場に作用させると 0 になる。同様のことが共変微分 $D_{\underline{a}}$ についても成り立つことが (1.38) を用いることで示される。

$$D_{\underline{a}}D_{\underline{b}}D_{\underline{c}} = U\partial_{\underline{a}}\partial_{\underline{b}}\partial_{\underline{c}}U^{-1} = 0. \tag{1.45}$$

この式は、任意の超場に $D_{\underline{a}}$ を二回作用させるとカイラル超場になることを意味している。次のカイラル射影演算子を定義しておく。

$$P_{\text{chiral}} = -\frac{1}{4}D^{\underline{a}}D_{\underline{a}}, \quad P_{\text{chiral}}^* = -\frac{1}{4}D^{\bar{a}}D_{\bar{a}} \tag{1.46}$$

($P_{\text{chiral}}^2 \neq P_{\text{chiral}}$ なので、正確には射影演算子ではない。) 任意の超場にこの演算子を作用させたもの $P_{\text{chiral}}V$ はカイラル超場となる。その成分場は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
P_{\text{chiral}}V|_{\theta=0} &= C^*, \\
D_L P_{\text{chiral}}V|_{\theta=0} &= \gamma^m\partial_m\eta_R - i\lambda_L, \\
\frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}P_{\text{chiral}}V|_{\theta=0} &= -\frac{i}{2}\partial_m v^m + \partial_m\partial^m B + \frac{1}{2}D.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

特に、複素ベクトル超場として反カイラル超場を取った場合には、次のようになる。

$$\begin{aligned}
P_{\text{chiral}}\Phi^*|_{\theta=0} &= F^*, \\
D_L P_{\text{chiral}}\Phi^*|_{\theta=0} &= \gamma^m \partial_m \chi_R, \\
\frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} P_{\text{chiral}}\Phi^*|_{\theta=0} &= \frac{1}{2} \partial_m \partial^m \phi^*.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

1.3 積の公式

超場の積は当然また超場になる。

$$V = V_1 V_2 \tag{1.49}$$

この超場の成分場は、共変微分のライプニッツ則を用いることによって次のように得られる。

$$\begin{aligned}
B &= B_1 B_2 \\
\eta_L &= B_1 \eta_{L2} + \eta_{L1} B_2, \\
\eta_R &= B_1 \eta_{R2} + \eta_{R1} B_2, \\
C &= B_1 C_2 + C_1 B_2 - \frac{1}{2} \eta_{L1} \eta_{L2}, \\
C^* &= B_1 C_2^* + C_1^* B_2 - \frac{1}{2} \eta_{R1} \eta_{R2}, \\
v_m &= B_1 v_{2m} + v_{1m}^* B_2 - \frac{i}{2} (\eta_1 \gamma_5 \gamma_m \eta_2), \\
\lambda_L &= B_1 \lambda_{2L} + \lambda_{1L} B_2 + i C_1^* \eta_{2L} + i \eta_{1L} C_2^* \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma^m \eta_{1R} (v_{2m} - i \partial_m B_2) + \frac{1}{2} (v_{1m} - i \partial_m B_1) \gamma^m \eta_{2R}, \\
\lambda_R &= B_1 \lambda_{2R} + \lambda_{1R} B_2 - i C_1 \eta_{2R} - i \eta_{1R} C_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma^m \eta_{1L} (v_{2m} + i \partial_m B_2) + \frac{1}{2} (v_{1m} + i \partial_m B_1) \gamma^m \eta_{2L}, \\
D &= B_1 D_2 + D_1 B_2 + 2 C_1 C_2^* + 2 C_1^* C_2 + i \eta_1 \gamma_5 \lambda_2 + i \lambda_1 \gamma_5 \eta_2 - v_m v^m \\
&\quad - \partial_m B_1 \partial^m B_2 - \frac{1}{2} \eta_1 \gamma^m \partial_m \eta_2 + \frac{1}{2} \partial_m \eta_1 \gamma^m \eta_2
\end{aligned} \tag{1.50}$$

カイラル超場の積はやはりカイラル超場である。

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \tag{1.51}$$

とおいとき、 Φ の成分場は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_1 \phi_2 \\
\chi_L &= \phi_1 \chi_{L2} + \chi_{L1} \phi_2, \\
F &= \phi_1 F_2 + F_1 \phi_2 - \frac{1}{2} \chi_{L1} \chi_{L2}.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

カイラル超場と反カイラル超場の積はカイラル条件を満足しないので、スカラー超場を与える。

$$V = \Phi_1^* \Phi_2 \quad (1.53)$$

とおいたとき、 V の成分場は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} B &= \phi_1^* \phi_2 \\ \eta_L &= \phi_1^* \chi_{L2}, \\ \eta_R &= \chi_{R1} \phi_2, \\ C &= \phi_1^* F_2, \\ C^* &= F_1^* \phi_2, \\ v_m &= i\phi_1^* \partial_m \phi_2 - i\partial_m \phi_1^* \phi_2 + \frac{i}{2} (\chi_{1R} \gamma_m \chi_{2L}), \\ \lambda_L &= iF_1^* \chi_{2L}, \\ \lambda_R &= -i\chi_{1R} F_2, \\ D &= 2F_1^* F_2 - 2\partial_m \phi_1^* \partial^m \phi_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \chi_{1R} \gamma^m \partial_m \chi_{2L} + \frac{1}{2} \partial_m \chi_{1R} \gamma^m \chi_{2L} \end{aligned} \quad (1.54)$$

さらに一般のカイラル超場と反カイラル超場の関数 $K(\Phi, \Phi^*)$ をスカラー超場としてその成分場を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} B &= K \\ \eta_L &= K_i \chi_L^i \\ \eta_R &= K_{\bar{i}} \bar{\chi}_R^{\bar{i}} \\ C &= K_i F^i - \frac{1}{4} K_{ij} (\chi_L^i \chi_L^j), \\ C^* &= K_{\bar{i}} F^{\bar{i}} - \frac{1}{4} K_{\bar{i}\bar{j}} (\bar{\chi}_R^{\bar{i}} \bar{\chi}_R^{\bar{j}}), \\ v_m &= -\frac{i}{2} K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma_m \bar{\chi}_R^{\bar{j}}) - iK_i \partial_m \phi^i + iK_{\bar{i}} \partial_m \phi^{*\bar{i}}, \\ \lambda_L &= -iK_{i\bar{j}} (\gamma^m \bar{\chi}_R^{\bar{j}}) \partial_m \phi^i + iK_{i\bar{j}} F^{*\bar{j}} \chi_L^i - \frac{i}{4} K_{i\bar{j}\bar{k}} \chi_L^i (\bar{\chi}_R^{\bar{j}} \bar{\chi}_R^{\bar{k}}), \\ \lambda_R &= iK_{i\bar{j}} (\gamma^m \chi_L^i) \partial_m \phi^{*\bar{j}} - iK_{i\bar{j}} F^i \bar{\chi}_R^{\bar{j}} + \frac{i}{4} K_{i\bar{j}k} \chi_L^i (\chi_L^j \chi_L^k), \\ D &= -2K_{i\bar{j}} \partial_m \phi^i \partial^m \phi^{*\bar{j}} + \frac{1}{2} K_{i\bar{j}} \partial_m \chi_L^i \gamma^m \bar{\chi}_R^{\bar{j}} - \frac{1}{2} K_{i\bar{j}} \chi_L^i \gamma^m \partial_m \bar{\chi}_R^{\bar{j}} + 2K_{i\bar{j}} F^i F^{*\bar{j}} \\ &\quad - \frac{1}{2} K_{i\bar{j}\bar{k}} (\chi_L^i \chi_L^j) F^{*\bar{k}} + \frac{1}{2} K_{i\bar{j}\bar{k}} (\partial_m \phi^i) (\chi_L^j \gamma^m \bar{\chi}_R^{\bar{k}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} K_{i\bar{j}k} (\bar{\chi}_R^{\bar{i}} \bar{\chi}_R^{\bar{j}}) F^k + \frac{1}{2} K_{i\bar{j}k} (\partial_m \phi^{*\bar{i}}) (\bar{\chi}_R^{\bar{j}} \gamma^m \chi_L^k) \\ &\quad + \frac{1}{8} K_{i\bar{j}\bar{k}l} (\chi_L^i \chi_L^j) (\bar{\chi}_R^{\bar{k}} \bar{\chi}_R^{\bar{l}}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

ただし、 K およびその微分は全て超場 Φ^i をそのスカラー成分 ϕ^i で置き換えたものである。

カイラル超場の一般の正則関数 $W(\Phi)$ はやはりカイラル超場である。その成分場は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\phi &= W, \\ \chi_L &= W_i \chi_L^i, \\ F &= W_i F^i - \frac{1}{4} W_{ij} (\chi_L^i \chi_L^j).\end{aligned}\tag{1.56}$$

1.4 超対称不変な作用

(1.44) に与えたカイラル多重項の F 成分の超対称変換は全微分の形をしており、4次元時空で積分すれば表面項を除き 0 になる。従って、その実部を取れば超対称変換で不変な作用として採用することができる。そこで、カイラル多重項の F 成分の積分を与える操作を $[\Phi]_F$ と表そう。これはグラスマン数である θ 座標の積分と次のように関係している。

$$\int d^4x d^2\theta_L \Phi = [\Phi]_F = \int d^4x F\tag{1.57}$$

任意の複素ベクトル超場について D 成分を見てみると変換が全微分であるから、やはり超対称変換で不変なラグランジアンとして用いることができる。任意の超場が与えられたときに、その D 成分の積分を与える操作を $[\dots]_D$ によって表そう。これはグラスマン座標に対する積分と次のように関係している。

$$\int d^4x d^4\theta V = \frac{1}{2} [V]_D = \frac{1}{2} \int d^4x D.\tag{1.58}$$

ただしここでは積分の測度を次のように定義した。

$$\int d^2\theta_L \theta_L^2 = \int d^4\theta_L^2 \theta_R^2 = 1.\tag{1.59}$$

D 項と F 項は次のように関係している。

$$\frac{1}{2} [V]_D = [P_{\text{chiral}} V]_F.\tag{1.60}$$

一般にカイラル超場 Φ^i (i は複数のカイラル超場を区別するためのラベル) の正則関数 $f(\Phi^i)$ があるとき、その F 項作用は (1.56) より直ちに次のように与えられる。

$$[f(\Phi)]_F = \int d^4x \left[f_i F^i - \frac{1}{4} f_{ij} (\chi_L^i \chi_L^j) \right]\tag{1.61}$$

ただし、 f_i および f_{ij} は関数 $f(\phi^i)$ の微分である。

$$f_i = \frac{\partial f(\phi^k)}{\partial \phi^i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f(\phi^k)}{\partial \phi^i \partial \phi^j}.\tag{1.62}$$

これらを用いて具体的にカイラル多重項の作用を与えることができる。

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}[\Phi^{*\bar{i}}\Phi^i]_D = [P_{\text{chiral}}\Phi^{*\bar{i}}\Phi^i]_F \\ &= \int d^4x \left[-\partial_m\phi^i\partial^m\phi^{*\bar{i}} - \frac{1}{2}(\chi_L^i\gamma^m\partial_m\chi_R^{\bar{i}}) + F^iF^{*\bar{i}} \right], \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{pot}} &= -[W(\Phi)]_F + \text{c.c.} \\ &= \int d^4x \left[-W_iF^i + \frac{1}{4}W_{ij}(\chi_L^i\chi_L^j) + \text{c.c.} \right] \end{aligned} \quad (1.64)$$

カイラル超場の正則関数 W は超ポテンシャルと呼ばれる。

1.5 スカラー多様体

さらに一般の、カノニカルではない運動項を与えるには、ケーラーポテンシャルと呼ばれる、カイラル超場の実関数 $K(\Phi, \Phi^*)$ を用いて、その D 成分を取ればよい。¹(1.55) より直ちに次の作用が得られる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}[K(\Phi^*, \Phi)]_D \\ &= \int d^4x \left[-K_{i\bar{j}}(\partial_\mu\phi^i)(\partial^\mu\phi^{*\bar{j}}) \right. \\ &\quad -\frac{1}{4}K_{i\bar{j}}(\chi_L^i\gamma^\mu\partial_\mu\chi_R^{\bar{j}}) - \frac{1}{4}K_{\bar{i}j}(\chi_R^{\bar{i}}\gamma^\mu\partial_\mu\chi_L^j) \\ &\quad -\frac{1}{4}K_{i\bar{j}k}(\chi_L^i\gamma^\mu\chi_R^{\bar{j}})(\partial_\mu\phi^{*\bar{k}}) - \frac{1}{4}K_{\bar{i}jk}(\chi_R^{\bar{i}}\gamma^\mu\chi_L^j)(\partial_\mu\phi^k) \\ &\quad +K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}} - \frac{1}{4}K_{i\bar{j}k}F^i(\chi_R^{\bar{j}}\chi_R^{\bar{k}}) - \frac{1}{4}K_{i\bar{j}k}(\chi_L^i\chi_L^j)F^{*\bar{k}} \\ &\quad \left. +\frac{1}{16}K_{i\bar{j}k\bar{l}}(\chi_L^i\chi_L^j)(\chi_R^{\bar{k}}\chi_R^{\bar{l}}) \right]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

ただし、微分を添字によって表す表記法を用いた。例えば $K_{i\bar{j}}$ は次の微分を表す。

$$K_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial\phi^i\partial\bar{\phi}^{\bar{j}}}. \quad (1.66)$$

スカラー ϕ^i の運動項に注目すると、 $K_{i\bar{j}}$ を計量とする標的空間に対する非線形シグマ模型の形をしている。この標的空間のことをスカラー多様体と以下では呼ぶことにする。

ラグランジアン (1.65) は、スカラー場の正則な変数変換

$$\phi^i \rightarrow \phi'^i = \phi'^i(\phi^i) \quad (1.67)$$

¹この節では、場を区別する添え字 i, j, k, l, m, \dots を多用するので、それらと混同しないように時空のベクトル添え字に μ, ν, \dots を用いる。

のもとでその形を変えない。ケーラーポテンシャルの関数形は変化するので、変数変換 (1.67) はラグランジアン対称性ではないが、このような座標変換に対する共変性を明らかにしておく、超重力理論の作用を構成する上で都合がよい。[19]

スカラー多様体上の座標変換 (1.67) を

$$\Phi^i \rightarrow \Phi'^i = \Phi'^i(\Phi^i) \quad (1.68)$$

のように超場に拡張することで、他の成分場がどのように変換されるかを見てみよう。まず、フェルミオン χ_L^i であるが、成分場の定義 (1.42) を用いれば、 Φ'^i のフェルミオン成分は次のように与えられる。

$$\chi_L'^i = D_L \Phi'^i(\Phi)|_{\theta=0} = \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \chi_L^j \quad (1.69)$$

関係式 (1.69) は、フェルミオン場 χ^i がスカラー多様体上のベクトルとして振舞うことを意味している。

補助場 F^i についても同様にしてスカラー多様体上の座標変換の下での変換則を決めると、

$$F'^i = \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} F^j - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \phi'^i}{\partial \phi^j \partial \phi^k} (\chi_L^j \chi_L^k) \quad (1.70)$$

となる。今度は、フェルミオンを含む余分な項が現れる。従って、 F^i はスカラー多様体上のベクトルとしては変換しない。しかし次のように補助場 F の定義を変更することによってスカラー多様体上でベクトルとして振舞う F_{cov}^i を導入することができる。

$$F_{\text{cov}}^i = F^i - \frac{1}{4} \Gamma_{jk}^i (\chi_L^j \chi_L^k). \quad (1.71)$$

成分場で書いたときにスカラー多様体上の座標変換の下での共変性を露にするためには、超場を成分場で展開したあとに補助場 F^i をここで定義された F_{cov}^i で書き直す必要がある。

フェルミオンの運動項には、スカラー多様体上のベクトル χ^i の微分が含まれている。 $\partial_\mu \chi^i$ に対してスカラー多様体上の座標変換 (1.69) を行ってみると、次のようにスカラー場の微分が現れ、共変な形になっていない。

$$\partial_\mu \chi_L'^i = \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \partial_\mu \chi_L^j + (\partial_\mu \phi^k) \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \chi_L^j \quad (1.72)$$

$\partial_\mu \chi^i$ を共変化するためには、次のようにスカラー多様体上のアフィン接続を含む項を付加すればよい。

$$D_\mu^{(M)} \chi^i \equiv \partial_\mu \chi^i + (\partial_\mu \phi^k) \Gamma_{kl}^i \chi^l. \quad (1.73)$$

これはスカラー多様体上の座標変換のもとで共変であり、 χ_L^i と同じ変換則 (1.69) によって変換される。

これらを用いて運動項ラグランジアン (1.65) を書き換えればスカラー多様体上の座標変換のもとでの共変性が明らかな形で書くことができる。

$$\begin{aligned}
S_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}[K(\Phi, \Phi^*)]_D \\
&= \int d^4x \left[-K_{i\bar{j}} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} - \frac{1}{2} K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(M)} \chi_R^{\bar{j}}) + K_{i\bar{j}} F_{\text{cov}}^i \bar{F}_{\text{cov}}^{\bar{j}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} R_{i\bar{j}k\bar{l}} (\chi_L^i \chi_L^k) (\chi_R^{\bar{j}} \chi_R^{\bar{l}}) \right]. \tag{1.74}
\end{aligned}$$

ただし、 $R_{k\bar{m}l\bar{n}}$ はスカラー多様体上の曲率テンソルであり、次の関係式が成り立つ。

$$K_{k\bar{l}m\bar{n}} - K_{i\bar{j}} \Gamma_{kl}^i \Gamma_{m\bar{n}}^{\bar{j}} = \partial_k K_{l\bar{m}n} - (\partial_k K_{i\bar{l}}) \Gamma_{m\bar{n}}^i = K_{i\bar{l}} \partial_k \Gamma_{m\bar{n}}^i = R_{k\bar{m}l\bar{n}} \tag{1.75}$$

ポテンシャル項 (1.64) については、補助場を F_{cov}^i を用いて書き換えると、超ポテンシャルの二階微分が共変微分になる。

$$\begin{aligned}
S_{\text{pot}} &= -[W(\Phi)]_F \\
&= \int d^4x \left[-(\partial_i W) F_{\text{cov}}^i + \frac{1}{4} (D_i^{(M)} \partial_j W) (\chi_L^i \chi_L^j) \right]. \tag{1.76}
\end{aligned}$$

このように、運動項、ポテンシャル項ともにスカラー多様体上の正則座標変換のもとで共変な形に書き換えることができる。

次に、超対称変換則がスカラー多様体上で共変な形に書けているかを見てみよう。まず、スカラー場の超対称変換 (1.44) はスカラー場の値を変化させるが、これはスカラー多様体上の点の移動を表すと考えられる。フェルミオン場 χ^i の超対称変換 (1.44) は、ベクトル χ^i の成分の変化を与えている。この量は、スカラー多様体上の異なる点でのベクトルの成分の差を表しているから、共変量ではない。このような異なる点でのベクトルの差として共変量を得るためには、アフィン接続を考慮した平行移動を用いて二つのベクトルを比較する必要がある。アフィン接続の寄与を補正した、共変な超対称変換を次のように定義する。

$$\delta_Q^{\text{cov}} \chi_L^i \equiv \delta_Q \chi_L^i + \delta_Q \phi^k \Gamma_{kl}^i \chi_L^l \tag{1.77}$$

補助場 F_{cov}^i についても同様である。変換則 (1.44) を代入すると次の共变的超対称変換を得る。

$$\begin{aligned}
\delta_Q^{\text{cov}} \chi_L^i &= 2\gamma^\mu \xi_R \partial_\mu \phi^i + 2\xi_L F_{\text{cov}}^i, \\
\delta_Q^{\text{cov}} F_{\text{cov}}^i &= \xi_R \gamma^\mu D_\mu^{(M)} \chi_L^i - \frac{1}{4} \delta \phi^{*\bar{l}} R_{i\bar{j}}^{\bar{l}k} (\chi_L^j \chi_L^k). \tag{1.78}
\end{aligned}$$

これらはどれもスカラー多様体上の正則座標変換のもとでの共変性が明らかな形をしている。

1.6 テンソル計算法

テンソル計算法 (tensor calculus) は、与えられた代数の表現、および表現に対する操作 (積を取る、ある表現から別の表現を構成する、など) を構成する標準的方法の一つである。表現を求めたい代数を G 、その部分群を H とする。部分群 H はその表現をよく知っているものを取るのがよい。例えば超対称多重項を構成する場合には、 G は超ポアンカレ代数または超共形代数であり、 H としては超ポアンカレ群、または超ポアンカレ群にディラレーション変換と R-対称性を加えたものを用いる。

G の表現は、その部分代数である H の幾つかの表現に分解される。そして、 G の生成子のうち H に属さないものは、これらの表現の間の変換を与え、昇降演算子の役割を果たす。超対称多重項については、それを分解して得られる H の表現は成分場である。それぞれの成分場に対して、ウェイトと呼ばれる数を割り当てる。この数は上昇演算子によって増加し、下降演算子によって減少するようなものであり通常は共形次元をウェイトとして用いる。そして、成分場の中で最低のウェイトを持つものを初項と呼ぶ。 G の表現の全ての成分場はこの初項の場の上昇演算子を作用させることで得ることができる。また、初項場が H のもとでどのように変換されるかが与えられていれば、交換関係を用いて G の表現の成分場の G 変換性を完全に決定することができる。

具体的にこの方法でベクトル多重項、カイラル多重項を構成しよう。 G として超ポアンカレ群を、 H としてポアンカレ群をとる。スカラー場 $B(x)$ をベクトル多重項の初項とし、ポアンカレ群のもとでの変換則を次のように取る。

$$\begin{aligned} P_m B &= \partial_m B, \\ M_{mn} B &= -(x_m \partial_n - x_n \partial_m) B. \end{aligned} \quad (1.79)$$

次に、初項 B に超対称変換 Q_a を作用させていくことにより成分場を定義する。 Q_a の同じ成分を二回作用させると 0 になることが代数からわかるので、全部で 16 個の成分場を定義することができる。 B を初項とするベクトル多重項 $V(B)$ を以下のような成分場の集合として定義する。

$$V[B] = \left[\begin{array}{ccc} B & \eta_{\bar{a}} = Q_{\bar{a}} B & C = \frac{1}{4} Q_{\bar{a}} Q^{\bar{a}} B \\ \eta_{\underline{a}} = Q_{\underline{a}} B & v_m = \frac{i}{4} (\gamma_m)^{\bar{a}b} [Q_{\bar{a}}, Q_{\underline{b}}] B & \lambda_{\underline{a}} = -\frac{i}{4} Q_{\bar{b}} Q^{\bar{b}} Q_{\underline{a}} B \\ C^* = \frac{1}{4} Q_{\underline{a}} Q^{\underline{a}} B & \lambda_{\bar{a}} = \frac{i}{4} Q_{\underline{b}} Q^{\underline{b}} Q_{\bar{a}} B & D = \frac{1}{8} Q_{\bar{a}} Q_{\underline{b}} Q^{\underline{b}} Q^{\bar{a}} B \end{array} \right] \quad (1.80)$$

(1.80) は超場形式での成分場の定義 (1.30) の共変微分を超対称変換で置き換えたものになっている。これら成分場の超対称変換則は、超ポアンカレ代数 (1.1) を用いる

ことで決めることができる。例えば、成分場 $\eta_{\bar{a}}$ の超対称変換は次のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
\xi^b Q_b \eta_{\bar{a}} &= \frac{1}{2} \xi^{\bar{b}} C_{\bar{b}\bar{a}} Q_{\bar{c}} Q^{\bar{c}} B + \frac{1}{2} \xi^b [Q_b, Q_{\bar{a}}] B + \frac{1}{2} \xi^b \{Q_b, Q_{\bar{a}}\} B \\
&= 2\xi_{\bar{a}} C - i(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}} \xi^{\underline{b}} v_m - (\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}} \xi^{\underline{b}} P_m B \\
&= 2\xi_{\bar{a}} C - i(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}} \xi^{\underline{b}} v_m - (\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}} \xi^{\underline{b}} \partial_m B
\end{aligned} \tag{1.81}$$

これは (1.34) に与えた変換則に一致する。このほかの全ての全ての成分場に対する変換則も同様に計算することができる。それらが超場形式で求めたものと一致することは、共変微分 D_a の反交換関係 (1.18) と超対称変換 Q_a の反交換関係 (1.1) が一致することから明らかである。

初項以外の成分場のポアンカレ群の下での変換も、代数を用いて得ることができる。例えば、 η_a がローレンツ回転のもとでスピノル場として変換されることは、初項の変換則 (1.79) と代数を用いることで次のように導かれる。

$$\begin{aligned}
M_{mn} \eta_a &= M_{mn} Q_a B \\
&= Q_a M_{mn} B + [M_{mn}, Q_a] B \\
&= -Q_a (x_m \partial_n - x_n \partial_m) B - \frac{1}{2} (\gamma_{mn})_a{}^b Q_b B \\
&= -(x_m \partial_n - x_n \partial_m) \eta_a - \frac{1}{2} (\gamma_{mn})_a{}^b \eta_b.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

これも超場形式における演算子 (1.11) を用いて得られるものに一致する。

初項を ϕ とするカイラル多重項 $\Sigma[\phi]$ は、初項に対して (1.79) と同様のポアンカレ代数のもとでの変換則を仮定し、カイラル条件を次のように設定する。

$$Q_{\underline{a}} \phi = 0. \tag{1.83}$$

そして成分場を次のように定義する。

$$\Sigma[\phi] = \left[\begin{array}{l} \phi \quad \chi_{\bar{a}} = Q_{\bar{a}} \phi \quad F = \frac{1}{4} Q_{\bar{a}} Q^{\bar{a}} \phi \end{array} \right]. \tag{1.84}$$

これらも超場形式における式の共変微分を超対称変換に置き換えた形をしており、超場形式で求めたものと同じ変換則が得られる。

次に、二つの多重項の積を求めることを考えよう。二つのベクトル多重項 $V[B_1]$ と $V[B_2]$ の積は、初項として $B_1 B_2$ を持つベクトル多重項 $V[B_1 B_2]$ として定義される。

$$V[B_1] V[B_2] = V[B_1 B_2] \tag{1.85}$$

これが超場の積と等価であることは明らかであろう。カイラル多重項同士の積や異なる多重項の間の積も初項の積を用いて同様に定義され、積がどのような多重項になるかということは初項がどのような条件を満足するかということによって決定される。

超場形式において、カイラル射影演算子を用いればスカラー超場 V からカイラル超場 $\Phi = P_{\text{chiral}}V$ を定義することができるが、これに対応するのは次のように定義される運動多重項である。

$$T(V[B]) = \Sigma\left[\frac{1}{4}Q_{\underline{a}}Q^{\underline{a}}B\right] = \Sigma[C^*] \quad (1.86)$$

これも、超場形式でのカイラル射影演算子 (1.46) の形に対応した形をしている。

以上のように、大域的超対称性理論においては超場形式とテンソル計算法は完全にパラレルになっており、実質的に違いはない。

1.7 ゲージ多重項

1.7.1 超空間上のゲージ場

スカラー超場はその成分としてベクトル場を含む。従って、ゲージ場を含む超対称多重項をスカラー超場を用いて記述することができる [14, 4, 11]。しかしここでは幾何学的な意味を明確にするために、実空間上のゲージ場と類似の方法を用いてゲージ多重項を導入する [16, 5]。スカラー超場はのちに「プレポテンシャル」として導入される。

超空間上のゲージ対称性は、実空間上のゲージ対称性と全く同様に導入することができる。コンパクトゲージ群を G 、その (エルミートな) 生成子を T_a としよう。ゲージ群のある線形表現に属する超空間上の超場 X は次のように変換される。

$$\delta X = i\epsilon^a T_a X = i\epsilon X. \quad (1.87)$$

ϵ^a は超空間上の実関数である。 X は一般に多成分の場であり、成分を区別するための添え字を書くとこの式は $\delta X^i = \epsilon^a (T_a)^i_j X^j$ となるが、しばしばこの添え字は省略される。また、(1.87) の二番目の表式のように、随伴表現に属する場 ϵ^a と生成子の積を単に ϵ と表すような表記法も用いる。 X に対してカイラル条件 $D_{\underline{a}}X = 0$ が課されていると、これは (1.87) のゲージ変換によって尊重されないことに注意しよう。ゲージ場に結合したカイラル超場の取り扱いについてはあとで詳しく述べる。

ゲージ群の構造定数 $f_{ab}{}^c$ を次の式によって定義する。

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c \quad (1.88)$$

ヤコビ項等式より、随伴表現の生成子が

$$(T_a^{\text{adj}})_b{}^c = i f_{ba}{}^c \quad (1.89)$$

と与えられることがわかる。

超空間上のゲージポテンシャルを

$$A = dz^M A_M = dz^M A_M^a T_a, \quad A_M = (A_m, A_\alpha) \quad (1.90)$$

とする。エルミート性は A_M に対して次の条件を課す。

$$(A_\mu)^\dagger = A_\mu, \quad (A_{\bar{\alpha}})^\dagger = A_\alpha. \quad (1.91)$$

スピノル成分はエルミート共役によってカイラリティが反転することに注意。

ゲージ群 G によって変換される超場 X とゲージ場 A_M のゲージ変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X' = gX, \\ A_M &\rightarrow A'_M = gA_M g^{-1} + ig\partial_M g^{-1}, \quad g \in G. \end{aligned} \quad (1.92)$$

ここでは、無限小変換 (1.87) ではなく、有限変換 g を与えた。このゲージ変換のもとで共変に変換される共変微分を \mathcal{D}_M とする。これは次のように定義される。

$$\mathcal{D}_M X = \partial_M X - iA_M X \quad (1.93)$$

この共変微分の交換関係は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \wedge \mathcal{D} &= -iF, \\ \mathcal{D}_M \mathcal{D}_N - (-)^{MN} \mathcal{D}_N \mathcal{D}_M &= -iF_{MN}, \\ \mathcal{D}_A \mathcal{D}_B - (-)^{AB} \mathcal{D}_B \mathcal{D}_A &= -T_{AB}{}^C \mathcal{D}_C - iF_{AB}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

一つ目は外微分形式で表したもの。二つ目はその成分、三つ目は添え字を局所座標系のものに直したものである。場の強さは次のように定義される。

$$\begin{aligned} F &= dA - iA^2, \\ F_{MN} &= \partial_M A_N - (-)^{MN} \partial_N A_M - i(A_M A_N - (-)^{MN} A_N A_M), \\ F_{AB} &= D_A A_B - (-)^{AB} D_B A_A - i(A_A A_B - (-)^{MN} A_B A_A) \\ &\quad + T_{AB}{}^C A_C. \end{aligned} \quad (1.95)$$

この関係式は一般の曲がった超空間の場合にも成り立つが、大域的な超対称性を扱っている場合には多脚場については (1.26) および (1.27) に与えられたものを、擦率 $T_{AB}{}^C$ については (1.29) に与えたものを採用すればよい。場の強さ F はビアンキ恒等式 $I \equiv \mathcal{D}F = 0$ を満足する。こちらも添え字を直交系のものに直しておけば、次のように表すことができる。

$$\frac{1}{6} E^C E^B E^A I_{ABC} = \frac{1}{2} E^C E^B E^A (\mathcal{D}_A F_{BC} + T_{AB}{}^D F_{DC}) = 0. \quad (1.96)$$

超場 A_M は多くの成分を含んでいるので、既約なゲージ多重項を得るためには次の拘束条件を課す必要がある。

$$F_{ab} = 0. \quad (1.97)$$

これが $F_{\alpha\beta} = 0$ ではないことは重要である。(1.97) のように、局所座標系を持つ成分に対して拘束条件を課すことで、拘束条件の共変性が保たれる。この拘束条件とビアンキ項等式 (1.96) を用いることにより、場の強さのほかの成分が次のように与えられることが示される。

$$\begin{aligned} F_{ma} &= -(\gamma_m)_a{}^b \widetilde{W}_b, \\ F_{mn} &= \frac{1}{4}(\gamma_{mn})^{ab} \mathcal{D}_a \widetilde{W}_b. \end{aligned} \quad (1.98)$$

これらの式は次のように書くこともできる。

$$\begin{aligned} F_{(\bar{a}a)\bar{b}} &= 2C_{\bar{a}\bar{b}} \widetilde{W}_a, \\ F_{(\bar{a}a)b} &= 2C_{ab} \widetilde{W}_{\bar{a}}, \\ F_{(\bar{a}a)(\bar{b}b)} &= -\frac{1}{2}C_{ab}(\mathcal{D}_{\bar{a}} \widetilde{W}_{\bar{b}} + \mathcal{D}_{\bar{b}} \widetilde{W}_{\bar{a}}) - \frac{1}{2}C_{\bar{a}\bar{b}}(\mathcal{D}_a \widetilde{W}_b + \mathcal{D}_b \widetilde{W}_a) \end{aligned} \quad (1.99)$$

ただし、 $\widetilde{W}^{\bar{a}}$ は次の条件を満足する超場である。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{a}} \widetilde{W}_{\bar{b}} &= 0, \\ \mathcal{D}_a \widetilde{W}_{\bar{b}} &= 0, \\ \mathcal{D}_a \widetilde{W}^{\bar{a}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.100)$$

始めの二つは $\widetilde{W}_{\bar{a}}$ がカイラル超場であることを表している。ただし、カイラル条件に用いられている共変微分はゲージ場を含むゲージ共変微分であることに注意しなければならない。このような、ゲージ共変微分を用いて定義されるカイラル超場を以下ではカノニカルなカイラル超場と呼ぶことにする。それに対して、ゲージ場を含まない共変微分を用いて定義されるカイラル超場を正則なカイラル超場と呼ぶことにする。この二種類のカイラル超場の関係はあとで議論することにする。二種類のカイラル超場を区別するために、カノニカルなカイラル超場には tilder をつけることにする。

以下で示すように、 \widetilde{W}_a はその成分場として場の強さ F_{mn} を含んでおり、最後の関係式はその場の強さに対するビアンキ項等式を与える。

W_α はゲージ共変であり、ゲージ変換 (1.92) のもとでカイラリティによらず次のように変換される。

$$\widetilde{W}_a \rightarrow \widetilde{W}'_a = g \widetilde{W}_a g^{-1}. \quad (1.101)$$

ゲージ多重項の成分場を次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} A_\mu|_{\theta=0} &= v_\mu, \\ \widetilde{W}_{\bar{a}}|_{\theta=0} &= \lambda_{\bar{a}}, \\ \frac{i}{2} \mathcal{D}^{\bar{a}} \widetilde{W}_{\bar{a}}|_{\theta=0} &= D. \end{aligned} \quad (1.102)$$

$A_{\bar{a}}$ の初項など、これら以外にも独立な成分は存在するが、それらはいずれもゲージ自由度であり、以下で見るように作用や物理的な場の超対称変換の中にはそれらの場は含まれない。

カイラル超場 $\widetilde{W}^{\bar{a}}$ の全成分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\bar{b}}|_{\theta=0} &= \lambda_{\bar{b}}, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}} \widetilde{W}_{\bar{b}}|_{\theta=0} &= \frac{1}{2} (\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}} F_{mn} + i C_{\bar{a}\bar{b}} D, \\ \frac{1}{4} \mathcal{D}_{\bar{a}} \mathcal{D}^{\bar{a}} \widetilde{W}_{\bar{b}}|_{\theta=0} &= (\gamma^m \mathcal{D}_m \lambda_R)_{\bar{b}}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

ただし、

$$F_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m - i[v_m, v_n]. \quad (1.104)$$

はゲージ場の強さを与える反対称テンソルである。これらを用いれば、次のように $\text{tr}(W^{\bar{a}} W_{\bar{a}})$ の F 項がゲージ多重項の運動項作用を与えることが示される。

$$-\frac{1}{2} [\text{tr} \widetilde{W}^{\bar{a}} \widetilde{W}_{\bar{a}}]_F = \int d^4x \text{tr} \left[-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} - (\lambda_L \gamma^m \mathcal{D}_m \lambda_R) + \frac{1}{2} D^2 - \frac{i}{8} \epsilon^{mnpq} F_{mn} F_{pq} \right] \quad (1.105)$$

ここまでは表面項を無視していない。表面項を無視すると、最後の項は消える。上記の作用は結合定数が定数であるが、カイラル超場に依存する関数 $\tilde{\tau}_{ab}$ を用いて

$$S = \frac{1}{2} \text{Im} [\tilde{\tau}_{ab} \widetilde{W}_L^a \widetilde{W}_L^b]_F \quad (1.106)$$

のように一般化することもできる。関数 $\tilde{\tau}_{ab}$ は、作用がゲージ不変であるためには、スカラー場のゲージ変換が次のように関数 $\tilde{\tau}_{ab}$ の双随伴表現としての変換を引き起こすことが必要である。

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_{ab}}{\partial \phi^i} \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^a) \phi^i = -\epsilon^c (f_{ac} d \tilde{\tau}_{db} + f_{bc} d \tilde{\tau}_{ad}) \quad (1.107)$$

スカラー場のゲージ変換 $\delta_{\text{gauge}}(\epsilon^a) \phi^i$ が非線形である場合も含め、このような条件を満足する関数 $\tilde{\tau}_{ab}$ の構成法は [6] に詳しく述べられている。

超場 $\widetilde{W}_{\bar{a}}$ の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_Q \widetilde{W}_{\bar{a}} = \xi^b \mathcal{D}_b \widetilde{W}_{\bar{a}}. \quad (1.108)$$

超対称変換 (1.108) の定義にゲージ共変微分を用いていることに注意しよう。これは超対称変換を超空間上のアイソメトリーとして実現した際に、ゲージ変換を同時に行うことを意味している。即ち、 $\delta_Q \tilde{\Phi} = \xi^a D_a \tilde{\Phi} + \delta_{\text{gauge}}(-\xi^a A_a) \tilde{\Phi}$ のように、 $-\xi^a A_a$ を変換パラメータとしたゲージ変換の寄与が加えられている。この場合、ゲージポテンシャル A_μ は $\delta_Q A_\mu = \xi^M F_{M\mu}$ と変換される。 v_μ の変換則はこの $\theta = 0$ 成分を取ることににより得られる。²

$$\begin{aligned}\delta_Q v_m &= (\xi \gamma_m \lambda), \\ \delta_Q \lambda_L &= -\frac{1}{2} \gamma^{mn} \xi_L F_{mn} + i D \xi_L, \\ \delta_Q D &= i(\xi_L \gamma^m \mathcal{D}_m \lambda_R) - i(\xi_R \gamma^m \mathcal{D}_m \lambda_L)\end{aligned}\quad (1.109)$$

$\tilde{W}_{\bar{a}}$ がカイラル超場であることを述べた際にも触れたように、ゲージ場に結合したカイラル超場を定義する場合、ゲージ共変微分を用いた定義

$$\mathcal{D}_{\bar{a}} \tilde{\Phi} = 0 \quad (1.110)$$

と、ゲージポテンシャルを含まない共変微分を用いた定義

$$D_{\bar{a}} \Phi = 0 \quad (1.111)$$

の二つが考えられる。前者を正準カイラル超場、後者を正則カイラル超場と呼んで区別することにする。カイラル超場がゲージ変換のもとで (1.92) のように変換されるとすれば、それは (1.110) によって定義される正準カイラル超場でなければならない。正則カイラル超場によるカイラル多重項の表現は後で議論される。

正準カイラル超場の成分場を定義する場合にも同じ共変微分を用いる必要がある。

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}|_{\theta=0} &= \phi, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}} \tilde{\Phi}|_{\theta=0} &= \chi_{\bar{a}}, \\ \frac{1}{4} \mathcal{D}_{\bar{a}} \mathcal{D}^{\bar{a}} \tilde{\Phi}|_{\theta=0} &= F.\end{aligned}\quad (1.112)$$

ゲージ群の非自明な表現に属する超場に作用するカイラル射影演算子は次のようにゲージ共変微分を用いて定義される。

$$P_{\text{chiral}} = \frac{1}{4} \mathcal{D}_{\bar{a}} \mathcal{D}^{\bar{a}} \quad (1.113)$$

カイラル多重項の作用を与える上で重要なのは $P_{\text{chiral}} \tilde{\Phi}^\dagger$ の成分場であり、次のようにゲージ多重項の成分場が含まれている。

$$\begin{aligned}P_{\text{chiral}} \tilde{\Phi}^*|_{\theta=0} &= F^*, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}} P_{\text{chiral}} \tilde{\Phi}^*|_{\theta=0} &= -\mathcal{D}_{\bar{a}b} \chi^b + 2i \phi^* \lambda_{\bar{a}}, \\ \frac{1}{4} \mathcal{D}_{\bar{a}} \mathcal{D}^{\bar{a}} P_{\text{chiral}} \tilde{\Phi}^*|_{\theta=0} &= \mathcal{D}_m \mathcal{D}^m \phi^* + i(\chi_R \lambda_R) - \phi^* D\end{aligned}\quad (1.114)$$

²WB §VII Exercise (8) の式に対応する。

ゲージ場に結合していないカイラル超場の対応する式 (1.48) と比較すると、微分がゲージ共変微分に置き換わっただけではなく、 λ や D などの場が現れている。これは、共変微分の交換関係 (1.94) から現れるものである。このように定義された正準カイラル超場を用いれば、ゲージ不変な作用は以前と全く同様の形に書くことができる。例えば、運動項 (1.63) は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi}]_D = [P_{\text{chiral}}\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi}]_F \\ &= \int d^4x \left[\phi \mathcal{D}_m \mathcal{D}^m \phi^* - \frac{1}{2}(\chi_L \gamma^m \mathcal{D}_m \chi_R) + F^* F \right. \\ &\quad \left. - i\phi^*(\lambda_L \chi_L) + i(\chi_R \lambda_R)\phi - \phi^* D\phi \right]. \end{aligned} \quad (1.115)$$

超対称変換則は次のように与えられる。

$$\delta\tilde{\Phi} = \xi^a \mathcal{D}_a \tilde{\Phi}. \quad (1.116)$$

成分場の超対称変換は次のように読み取ることができる。³

$$\begin{aligned} \delta\phi &= (\xi_L \chi_L), \\ \delta\chi_L &= 2\gamma^m \xi_R \mathcal{D}_m \phi + 2\xi_L F, \\ \delta F &= (\xi_R \gamma^m \mathcal{D}_m \chi_L) - 2i(\xi_R \lambda_R)\phi \end{aligned} \quad (1.117)$$

1.7.2 プレポテンシャルとカイラルゲージ変換

拘束条件 $F_{ab} = 0$ は複素化されたゲージ群 G_C に値をとるカイラル超場 M を用いて次のように解くことができる。

$$\begin{aligned} A_{\bar{a}} &= iM^{-1\dagger} D_{\bar{a}} M^\dagger, \\ A_{\underline{a}} &= iM D_{\underline{a}} M^{-1}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

M はプレポテンシャルと呼ばれる。

もともとのゲージ対称性は

$$M \rightarrow M' = gM, \quad g \in G \quad (1.119)$$

によって与えられる。一方、ゲージポテンシャル A_M は変化させないが、プレポテンシャルのみを変化させる次のゲージ対称性が新たに現れる。

$$M \rightarrow M' = M g_C^{-1}, \quad g_C \in G_C, \quad D_{\underline{a}} g_C = 0. \quad (1.120)$$

³WB §VII Exercise (8) の式に対応する。ゲージ群の生成子の関係は $T_a^{\text{ours}} = -gT_a^{WB}$ 。

変換パラメータ g_C は複素化されたゲージ群に値をとるカイラル超場である。 G ゲージ不変であるエルミートなプレポテンシャルを

$$N = M^\dagger M \quad (1.121)$$

によって定義しよう。このプレポテンシャルは次のようにゲージ変換される。

$$N \rightarrow N' = g_C^{-1\dagger} N g_C^{-1}, \quad g_C \in G_C. \quad (1.122)$$

共変微分に含まれるゲージポテンシャルに (1.118) を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{a}} X &= M^{-1\dagger} D_{\bar{a}}(M^\dagger X), \\ \mathcal{D}_a X &= M D_a(M^{-1} X). \end{aligned} \quad (1.123)$$

のように書き換えることができる。同じことだが、

$$M^\dagger \mathcal{D}_L = D_L M^\dagger, \quad M^{-1} \mathcal{D}_R = D_R M^{-1}. \quad (1.124)$$

のように、プレポテンシャルが「通り抜ける」と、ゲージ共変微分がゲージ場を含まない共変微分になる。このことを用いて、カノニカルなカイラル超場と正則なカイラル超場を互いに書き換えることができる。超場 $\tilde{\Phi}$ が (1.110) のように共変微分 $\mathcal{D}_{\bar{a}}$ を用いて定義されるカノニカルなカイラル超場であるとする。このとき

$$\Phi = M^{-1} \tilde{\Phi} \quad (1.125)$$

によって Φ を定義すると、これはゲージ場を含まないカイラル条件 (1.36) を満足する正則なカイラル超場である。 Φ はユニタリーゲージ変換 (1.92) によって変換されないが、その代わりにカイラルゲージ変換 (1.120) のもとで次のように変換される。

$$\Phi \rightarrow \Phi' = g_C \Phi. \quad (1.126)$$

Φ を用いると、ゲージ不変な運動項は次のように与えることができる。

$$S = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}^* \tilde{\Phi}]_D = \frac{1}{2} [\Phi^* N \Phi]_D \quad (1.127)$$

カイラル条件がゲージポテンシャルに依存しない代わりに、作用にプレポテンシャルが現れる。超ポテンシャル項については、それがゲージ不変である場合には $W(\tilde{\Phi}) = W(\Phi)$ であり、プレポテンシャルはあらわには現れない。

カノニカルなカイラル超場 $\tilde{W}_{\bar{a}}$ に対応する正則なカイラル超場は次のように定義できる。

$$W_{\bar{a}} = M^{-1} \tilde{W}_{\bar{a}} M \quad (1.128)$$

すると、この $W_{\bar{a}}$ のゲージ変換は次のようになる。

$$W_{\bar{a}} \rightarrow W'_{\bar{a}} = g_C W_{\bar{a}} g_C^{-1}, \quad g_C \in G_C. \quad (1.129)$$

$W_{\bar{a}}$ はプレポテンシャルを用いて以下のように与えられる。⁴

$$\begin{aligned} W_{\bar{a}} &= \frac{1}{4} M^{-1} F_{(\bar{a}b)}{}^b M \\ &= \frac{i}{8} D^b D_{\bar{b}} (N^{-1} D_{\bar{a}} N) \end{aligned} \quad (1.130)$$

(1.130) によって $W_{\bar{a}}$ を定義したとき、 N に対して (1.122) のゲージ変換を行うと $W_{\bar{a}}$ が (1.129) のように変換されることは直ちに確かめることができる。

1.7.3 Wess-Zumino ゲージ

カイラル超場として常に $\tilde{\Phi}$ ではなく Φ を用いることにすれば、パラメータが λ であるユニタリーゲージ変換は物質場に作用せず、プレポテンシャル M にもみ作用する。従って、プレポテンシャルに対してユニタリーゲージ変換を行ったものを同一視することにより M を $G \setminus G_C$ の元であるとみなすことができる。この商空間の座標を導入するために、複素化されたゲージ群に値をとるプレポテンシャル M を、ゲージ群 G のリー代数 (エルミート) に値をとる二つの超場 U と V を用いて次のように表そう。

$$M = e^{iU} e^{-V} \quad (1.131)$$

M 同様、 U や V もプレポテンシャルと呼ばれる。 M に左から作用する G ゲージ変換 (1.119) は、 U にもみ作用し V を変化させない。そこで、超場 V を $G \setminus G_C$ の座標として用いることができる。

ユニタリーゲージ変換 (1.119) を用いると常に $U = 0$ に取ることができる。このとき、 M はエルミート行列になる。そこでこのゲージをエルミートゲージと呼ぶことにしよう。さらに、カイラルゲージ変換 (1.120) を用いることで V に対して次の条件を課すことができる。

$$V|_{\theta=0} = D_{\bar{a}} V|_{\theta=0} = D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} V|_{\theta=0} = 0. \quad (1.132)$$

このゲージは Wess-Zumino ゲージ [14] と呼ばれる。このとき、(1.125) によって関係する二つのカイラル超場の成分場は一致する。

$$\begin{aligned} \phi &= \tilde{\Phi}|_{\theta=0} = \Phi|_{\theta=0}, \\ \chi_{\bar{a}} &= \mathcal{D}_{\bar{a}} \tilde{\Phi}|_{\theta=0} = D_{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0}, \\ F &= \frac{1}{4} \mathcal{D}_{\bar{a}} \mathcal{D}^{\bar{a}} \tilde{\Phi}|_{\theta=0} = \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

⁴Abelian の場合 WB の (7.22) に対応する。

ただし、高次の微分については、 V の寄与が現れるので必ずしも一致しない。 $\Phi^\dagger e^{-2V}$ の成分場についても、Wess-Zumino ゲージでは以下のように (1.114) に一致する。

$$\begin{aligned} P_{\text{chiral}}(\Phi^\dagger e^{-2V})|_{\theta=0} &= F^\dagger, \\ D_{\bar{a}} P_{\text{chiral}}(\Phi^\dagger e^{-2V})|_{\theta=0} &= -\mathcal{D}_{\bar{a}b} \chi^\beta + 2i\phi^\dagger \lambda_{\bar{a}}, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} P_{\text{chiral}}(\Phi^\dagger e^{-2V})|_{\theta=0} &= \mathcal{D}_m \mathcal{D}^m \phi^\dagger + i(\chi_R \lambda_R) - \phi^\dagger D \end{aligned} \quad (1.134)$$

これらの関係式のおかげで、Wess-Zumino ゲージにおいてはゲージ共変なカイラル超場を用いてもそうでなくても、その成分場表示は一致する。

注意しなければならないのは、Wess-Zimono ゲージ条件は超対称変換によって破れることである。ゲージを回復するためのゲージ変換を超対称変換と同時にこななければならない。

$$\begin{aligned} \delta V &= \xi^a D_a V + \delta_{\text{gauge}}(\Lambda_c) V, \\ \delta \Phi &= \xi^a D_a \Phi + \delta_{\text{gauge}}(\Lambda_c) \Phi. \end{aligned} \quad (1.135)$$

ゲージ変換パラメータ Λ_c は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Lambda_c|_{\theta=0} &= 0, \\ D_{\bar{a}} \Lambda_c|_{\theta=0} &= -2i\gamma^m \xi_R \nu_m, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} \Lambda_c|_{\theta=0} &= -2i(\xi_R \lambda_R) \end{aligned} \quad (1.136)$$

(1.135) が以前に与えた成分場の超対称変換則を再現することは簡単に確かめることができる。

1.7.4 Fayet-Iliopoulos 項

ここまでに見てきたように、成分場の超対称変換や超ポテンシャル項を書くだけであればプレポテンシャルを用いる必要は無い。むしろプレポテンシャルを用いないほうがゲージ変換のもとで共変な形をした変換則、作用の導出は簡単である。カイラル多重項の運動項についても、ケーラーポテンシャルがゲージ不変である場合には同じことが言える。

しかし、プレポテンシャルを用いることによって初めて超対称性が明白な形で書くことができる作用が存在する。その一つの例は次の項である。

$$S_{\text{FI}}^{\text{vector}} = -\zeta[V]_D = -\zeta \int d^4 x D. \quad (1.137)$$

これはゲージ群が $U(1)$ の場合には超対称不変であると同時にゲージ不変でもあり、作用として採用することができる。この項は超対称性が自発的に破れるモデルを構成す

るために Fayet と Iliopoulos によって初めて導入された [2] もので、Fayet-Iliopoulos 項と呼ばれる。

これがゲージ不変であることを見るために、プレポテンシャル V のゲージ変換を求めておこう。ゲージ群 G_C の代数に値をとるカイラル超場 Λ を用いて、無限小変換を $g_C = e^\Lambda$ と置こう。ゲージ変換 (1.122) は Λ が無限小の微量量である場合次のようになる。

$$-\delta_{\text{gauge}} e^{-2V} = 2 \int dt e^{-2tV} \delta V e^{-2(1-t)V} = \Lambda^\dagger e^{-2V} + e^{-2V} \Lambda \quad (1.138)$$

両辺に右から e^{2V} を掛け、 $[V, X] = V_{\text{adj}} X$ のように、 V を随伴表現の行列に書き換える。左辺の被積分関数を $e^{-2tV} \delta_{\text{gauge}} V e^{2tV} = e^{-2tV_{\text{adj}}} \delta_{\text{gauge}} V$ と書き換えれば積分を実行できて

$$\frac{1 - e^{-2V_{\text{adj}}}}{V_{\text{adj}}} \delta_{\text{gauge}} V = \Lambda^\dagger + e^{-2V_{\text{adj}}} \Lambda \quad (1.139)$$

従って $\delta_{\text{gauge}} V$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gauge}} V &= \frac{V_{\text{adj}}}{1 - e^{-2V_{\text{adj}}}} \Lambda^\dagger + \frac{V_{\text{adj}}}{e^{2V_{\text{adj}}} - 1} \Lambda \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + V_{\text{adj}} + \frac{1}{3} V_{\text{adj}}^2 \right) \Lambda^\dagger + \frac{1}{2} \left(1 - V_{\text{adj}} + \frac{1}{3} V_{\text{adj}}^2 \right) \Lambda + \mathcal{O}(V^3) \\ &= \frac{1}{2} \left(\Lambda + \Lambda^\dagger - [V, \Lambda - \Lambda^\dagger] + \frac{1}{3} [V, [V, \Lambda + \Lambda^\dagger]] \right) + \mathcal{O}(V^3) \end{aligned} \quad (1.140)$$

ゲージ群が $U(1)$ である場合には、交換関係の項は 0 になるから、ゲージ変換は簡単に次のように与えられる。

$$\delta_{\text{gauge}} V = \frac{1}{2} (\Lambda + \Lambda^*) \quad (1.141)$$

カイラル超場の D 項が表面項を除き 0 であることを用いれば、作用 (1.137) はゲージ不変であることがわかる。

1.8 アイソメトリー

ここまでは、スカラー場およびそれと同じ超対称多重項に属するフェルミオンが次のように線形にゲージ変換されることを仮定していた。

$$\delta_{\text{gauge}} \phi^i = i\epsilon^\alpha (T_\alpha)^i_j \phi^j, \quad \delta_{\text{gauge}} \chi_L^i = i\epsilon^\alpha (T_\alpha)^i_j \chi_L^j. \quad (1.142)$$

これに対応して共変微分は次のように定義されていた。

$$D_\mu^{(G)} \phi^i = \partial_\mu \phi^i - iA_\mu^\alpha (T_\alpha)^i_j \phi^j, \quad D_\mu^{(G)} \chi_L^i = \partial_\mu \chi_L^i - iA_\mu^\alpha (T_\alpha)^i_j \chi_L^j. \quad (1.143)$$

ゲージ変換 (1.142) の線形性は、スカラー多様体上の座標変換を行うと崩れてしまうので、スカラー多様体上の座標変換の下での共変性を明らかにするために次の形に書き換えておく。

$$\delta_{\text{gauge}}\phi^i = \epsilon^a X_a \phi^i = \epsilon^a t_a^i \equiv \epsilon^i \quad (1.144)$$

ただし t_a^i はスカラー多様体上の計量、複素構造を不変に保つ正則なアイソメトリーを生成する正則キリングベクトルである。添え字 a はゲージ群の生成子のラベルである。ベクトルの別の成分 t_a^i の複素共役が同じベクトルの成分 $\bar{t}_a^{\bar{i}}$ になるという意味で、このベクトルは実である。

$N = 1$ 超対称理論において、一般のケーラー多様体のアイソメトリーをゲージ化する方法は成分場形式を用いて [1] において初めて与えられた。ここでは [6] に従い、超対称性が明白な超場形式を用いた方法を説明する。

アイソメトリーがなすリー群の構造定数を $f_{ab}{}^c$ とする。すなわち

$$[X_a, X_b] = f_{ab}{}^c X_c \quad (1.145)$$

とする。線形である場合には、エルミートな生成子行列 T_a を用いて $t_a^i = i(T_a)^i{}_j q^j$ あるいは

$$X_a = i(T_a)^i{}_j q^j \partial_i \quad (1.146)$$

と与えることができるが、この場合上記の構造定数の定義は (1.88) に一致する。

この変換のもとで、ケーラーポテンシャルは必ずしもゲージ不変でなくてもよい。ただし、スカラー多様体の計量はゲージ不変でなければならないので、 K のゲージ変換は次のようにケーラー変換の形に書けなければならない。

$$\delta_{\text{gauge}} K = \epsilon^a (t_a^i K_i + \bar{t}_a^{\bar{i}} K_{\bar{i}}) = -\epsilon^a (f_a + f_a^*) \quad (1.147)$$

変換 (1.144) はスカラー多様体の対称性、すなわちアイソメトリーになっていなければならない。これはベクトル場 t_a によるリー微分が計量を変化させないということの意味する。この条件は実座標で

$$\mathcal{L}_{t_a} g_{mn} = D_m t_{a,n} + D_n t_{a,m} = 0 \quad (1.148)$$

と書くことができる。さらに、このアイソメトリーがスカラー多様体上の複素構造を保存するためには、

$$\mathcal{L}_{t_a} I^m{}_n = t_a{}^m{}_k I^k{}_n - I^m{}_k t_a{}^k{}_n = 0 \quad (1.149)$$

である必要がある。これらを、複素座標で書き直せば

$$D_i t_{a,j} = 0, \quad D_i t_{a,\bar{j}} + D_{\bar{j}} t_{a,i} = 0 \quad (1.150)$$

が得られる。ここで、ベクトル μ_a を t_a に複素構造を掛けたものとして次のように定義する。

$$\mu_{a,i} = i t_{a,i}, \quad \mu_{a,\bar{i}} = -i t_{a,\bar{i}}. \quad (1.151)$$

このベクトルも t_a と同じ意味で実である。また、次の式を満足する。

$$D_i \mu_{a,j} = 0, \quad D_i \mu_{a,\bar{j}} = D_{\bar{j}} \mu_{a,i}. \quad (1.152)$$

これらの式は、 $\mu_{a,i}$ がスカラー多様体上のある関数の微分として与えられることを意味している。つまり、

$$\mu_{a,i} = \partial_i \mu_a, \quad \mu_{a,\bar{i}} = \partial_{\bar{i}} \mu_a \quad (1.153)$$

となる実関数 μ_a が存在する。この解は次のように与えることができる。

$$\mu_a = i(t_a^{\bar{j}} K_{\bar{j}} + f_a^*(z^*)) = -i(t_a^i K_i + f_a(z)) \quad (1.154)$$

二つの表式を与えたが、一つ目は (1.153) の第 1 式の一般解を、二つ目は (1.153) の第 2 式の一般解を与えている。これら二つが等しいということは K のゲージ変換のもとでの性質を表す式 (1.147) によって保障される。

(1.154) の式を、ケーラーポテンシャルとキリングベクトルが与えられたとき、二つ目の等号を満足させるように $f_a(z)$ を適当に選ぶことによってモーメントマップ μ_a を与える式であると解釈できる。二つ目の等号が任意の z に対して成立すべしという条件は $\text{Re } f_a$ を一意的に決める。 f_a は正則関数であるから、この条件は f_a の関数形をほとんど決めるが、 f_a の虚部の定数部分だけは不定のまま残る。

この不定性は、 G が非アーベル群の場合には μ_a が G ゲージ変換のもとで次のように随伴表現として変換されることを要請すれば固定することができる。

$$\epsilon^b (X_b + X_b^*) \mu_a = -\epsilon^b \mu_c f_{ab}^c \quad (1.155)$$

ただし、構造定数は (1.88) によって定義されている。ゲージ変換が線形である場合にはモーメントマップは

$$\mu_a = \frac{1}{2} \left(K_i (T_a)^i_j \phi^j + \phi^{*\bar{i}} (T_a)_{\bar{i}}^{\bar{j}} K_{\bar{j}} \right) + \zeta_a \quad (1.156)$$

となる。ただし ζ_a は $U(1)$ 部分についてのみ値を持つことができ、Fayet-Illiopoulus パラメータに他ならない。

さて、カイラル超場のスカラー成分 ϕ^i に対するゲージ変換則 (1.144) を、次のように超場全体に拡張しよう。

$$\delta \tilde{\Phi}^i = \lambda^a t_a^i \quad (1.157)$$

ここではゲージ共変なカイラル超場を用いている。このゲージ変換がカイラル性を破らないことは、キリングベクトルが正則であり、 t_a^i が $\tilde{\Phi}^j$ にのみ依存することによって保障されている。このゲージ変換のもとでの共変微分は次のように定義される。

$$\mathcal{D}_M \tilde{\Phi}^i = \partial_M \tilde{\Phi}^i - i A_M^a t_a^i(\tilde{\Phi}). \quad (1.158)$$

カノニカルなカイラル超場 $\tilde{\Phi}^i$ のカイラル性は共変微分を用いて次のように定義される。

$$\mathcal{D}_a \tilde{\Phi} = D_a \tilde{\Phi}^i - i(M D_a M^{-1})^\alpha t_\alpha^i = 0 \quad (1.159)$$

このカイラル条件はプレポテンシャルを含む。ゲージ変換が線形な場合には、(1.125) によってカノニカルなカイラル超場と正則なカイラル超場を関係付けることができた。アイソメトリーとして記述された一般のゲージ対称性についても同様の関係式を導こう。正則なカイラル超場 Φ^i とプレポテンシャル M を用いてカノニカルなカイラル超場 $\tilde{\Phi}^i$ を与えることができると仮定しよう。

$$\tilde{\Phi}^i = \tilde{\Phi}^i(\Phi^j, M) \quad (1.160)$$

これをカノニカルなカイラル超場の条件 (1.159) に代入してみると、 $D_a \tilde{\Phi} = 0$ であることを用いて次の式が得られる。

$$\delta_a \tilde{\Phi}^i = t_\alpha^i(\tilde{\Phi}^j) \quad (1.161)$$

ただし、ユニタリーゲージ変換

$$M \rightarrow M' = (1 + i\epsilon^\alpha T_\alpha)M, \quad (1.162)$$

のもとでの変分を $\epsilon^\alpha \delta_\alpha$ と定義した。 $M = 1$ 、すなわち単位元である場合には

$$\tilde{\Phi}^i|_{M=1} = \Phi^i \quad (1.163)$$

となると仮定しよう。この条件を初期条件として (1.161) を積分していくことにより、 $\tilde{\Phi}^i(\Phi^j, M)$ の関数形を決定することができる。

もともと、スカラー多様体にはコンパクトゲージ群 G の作用が定義されている。これを

$$\tilde{\Phi}^i \rightarrow \tilde{\Phi}'^i = g(\tilde{\Phi}^i), \quad g \in G \quad (1.164)$$

と書くことにしよう。(1.161) と (1.163) はこれを G_C に拡張したものをういて

$$\tilde{\Phi}^i = M(\Phi^i), \quad M \in G_C \quad (1.165)$$

のように $\tilde{\Phi}^i$ を与えることができることを意味している。これは、ゲージ変換が線形である場合の関係式 (1.125) の自然な拡張になっている。

こうして、アイソメトリーがゲージ化された場合のカイラル超場が定義できたので、それを用いてゲージ不変な作用を与えることを考えよう。あるケーラー多様体のケーラーポテンシャルを $K(\phi^i, \phi^{*\bar{i}})$ とする。ケーラーポテンシャルがアイソメトリーのもとで不変であるときには、アイソメトリーに対するゲージ不変性を持つ作用を与え

るのは簡単であり、単にケーラーポテンシャルのスカラー場をゲージ共変な超場 $\tilde{\Phi}^i$ で置き換え、その D -項をとればよい。

$$S = \frac{1}{2}[K(\tilde{\Phi}^i, \tilde{\Phi}^{*\bar{i}})]_D = \int d^4x d^4\theta K(\tilde{\Phi}^i, \tilde{\Phi}^{*\bar{i}}) \quad (1.166)$$

一般には、ケーラーポテンシャルはアイソメトリーのもとで不変である必要はなく、ケーラー変換の分だけ変化してもよい。 $X_\alpha = t_\alpha^i \partial_i$ とすれば次のようにかかる。

$$\delta_{\text{gauge}} K = \epsilon^\alpha (X_\alpha + X_\alpha^*) K = -\epsilon^\alpha (f_\alpha + f_\alpha^*) \quad (1.167)$$

f_α が 0 でないときには、(1.166) はゲージ不変な作用を与えない。なぜなら、(1.166) をゲージ変換することで得られる

$$\delta S = \int d^4x d^4\theta [-\epsilon^\alpha (f_\alpha(\tilde{\Phi}) + f_\alpha^*(\tilde{\Phi}^*))] \quad (1.168)$$

は、もし $D_\alpha f_\alpha = 0$ であれば 0 であるが、 f_α のカイラル性は $\mathcal{D}_\alpha f_\alpha = 0$ によって定義され、このときには上記の積分が 0 にはならないからである。 f_α が 0 ではないときにゲージ不変な作用を得るために、カイラル超場として $\tilde{\Phi}$ ではなく Φ を用い、ゲージ多重項に依存しない作用

$$S_0 = \frac{1}{2}[K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}})]_D = \int d^4x d^4\theta K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}}) \quad (1.169)$$

から出発して、ネーター手続きによってゲージ場を結合させることを考えよう。最終的に得られるゲージ不変な作用を

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2}[K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}}) + \Gamma(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}}, V)]_D \\ &= \int d^4x d^4\theta [K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}}) + \Gamma(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}}, V)] \end{aligned} \quad (1.170)$$

カイラル超場として Φ を用いた場合には、ゲージ変換はパラメータ ϵ^α を複素パラメータ $-i\Lambda$ または $i\Lambda^*$ に置き換えることで定義される次の微分演算子によって与えられる。

$$\delta_C = -i\Lambda^\alpha X_\alpha + i\Lambda^{*\alpha} X_\alpha^* \quad (1.171)$$

ただし、パラメータ Λ は G_C のリー代数に値をとるカイラル超場である。この複素化されたゲージ変換のもとでの K の変換性は関係式 (1.154) を用いることで次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_C K &= (-i\Lambda^\alpha X_\alpha + i\Lambda^{*\alpha} X_\alpha^*) K \\ &= i\Lambda^\alpha f_\alpha - i\Lambda^{*\alpha} f_\alpha^* + (\Lambda^\alpha + \Lambda^{*\alpha}) \mu_\alpha. \end{aligned} \quad (1.172)$$

この変換については、最初の二項はケーラー変換であるとみなすことができ、作用を変化させないが、最後のキリングポテンシャルを含む項はそうではない。この余分な

項は $\Lambda^a + \Lambda^{*a}$ に比例しているが、これはブレポテンシャル V のゲージ変換に現れる、 V 展開の初項に現れる形と一致している。このことを利用すれば、 V を含む新たな項を導入することで (1.172) の最後の項を相殺することができる。

相殺項を V でべき展開し

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \dots \quad (1.173)$$

と置こう。(1.172) と V のゲージ変換を比較すれば

$$\Gamma^{(1)} = -2V^a \mu_a \quad (1.174)$$

と置けばよいことがわかる。この項をゲージ変換してみると、

$$\delta_C \Gamma^{(1)} = -(\Lambda^a + \Lambda^{*a}) \mu_a + iV^b (\Lambda^c - \Lambda^{\dagger c}) f_{bc}{}^a \mu_a + \mathcal{O}(V^2) - 2V^a \delta_C \mu_a. \quad (1.175)$$

が得られる。この第1項により (1.172) の第3項が相殺される。(1.175) の第2項は、パラメータを $\Lambda - \Lambda^*$ の形で含む。このような項が現れると、 V を含む相殺項の導入によってうまく相殺することができなくなる。しかしこの項は末尾の $\delta \mu_a$ を含む項の一部とうまく相殺することがわかる。このことを見るには、 $\delta_C \mu_a$ を次のように処理する。まず、パラメータの和に比例する部分と差に比例する部分に分解する。

$$\delta_C \mu_a = \frac{1}{2i} (\Lambda^b - \Lambda^{\dagger b}) (X_b + X_b^\dagger) \mu_a - \frac{i}{2} (\Lambda^b + \Lambda^{\dagger b}) (X_b - X_b^\dagger) \mu_a \quad (1.176)$$

$X_b + X_b^*$ による変換は (1.155) に与えられている。それを代入すると、 $\Lambda - \Lambda^*$ に比例する部分が相殺して次の結果を得る。

$$\delta_C (K + \Gamma^{(1)}) = i\Lambda^a f_a - i\Lambda^{*a} f_a^* + iV^a (\Lambda^b + \Lambda^{\dagger b}) (X_b - X_b^\dagger) \mu_a + \mathcal{O}(V^2) \quad (1.177)$$

$(X_a - X_a^*) \mu_b$ は

$$(X_a - X_a^*) \mu_b = iK^{i\bar{j}} (\partial_i \mu_a \partial_{\bar{j}} \mu_b + \partial_i \mu_b \partial_{\bar{j}} \mu_a) \quad (1.178)$$

のように a と b について対称であるから、(1.177) の中の V の1次の項は次の $\Gamma^{(2)}$ によって相殺できる。

$$\Gamma^{(2)} = -iV^a V^b (X_b - X_b^\dagger) \mu_a \quad (1.179)$$

この操作はどこまでも繰り返すことができ、次の結果を得る。

$$\Gamma = -\frac{e^{\mathcal{O}} - 1}{\mathcal{O}} 2V^a \mu_a \quad (1.180)$$

ただし、 \mathcal{O} は次のように定義される微分演算子である。

$$\mathcal{O} = iV^b (X_b - X_b^*) \quad (1.181)$$

ケーラーポテンシャルに相殺項を加えたもののゲージ変換は、次のようにカイラル部分と反カイラル部分の和になる。

$$\delta_C(K + \Gamma) = i\Lambda^\alpha f_\alpha - i\Lambda^{*\alpha} f_\alpha^* \quad (1.182)$$

Wess-Zumino ゲージにおいては $\Gamma^{(3)}$ 以降は全て 0 になる。 $\Gamma^{(2)}$ はゲージ場 v_μ について 2 次であり、作用中の微分を共変微分に置き換える役割を果たす。 $\Gamma^{(1)}$ にもゲージ場 v_μ を含む項があり、それも微分を共変微分にする役割を果たすが、それ以外にも以下の項を含む。

$$\int d^4\theta \Gamma^{(1)} = (v_\mu \text{ terms}) + t_\alpha^{\bar{j}} K_{\bar{j}k} (\lambda_L^\alpha \chi_L^k) + (\chi_R^{\bar{i}} \lambda_R^\alpha) K_{\bar{i}j} t_\alpha^j - D^\alpha \mu_\alpha \quad (1.183)$$

ケーラーポテンシャルが完全にゲージ不変であり、ケーラー変換項を出さない場合、すなわち $f_\alpha = 0$ である場合には、

$$\mathcal{O}K = -2V^\alpha \mu_\alpha \quad (1.184)$$

が成り立つ。このときケーラーポテンシャルと (1.180) の和は次のように (1.166) に一致する。

$$K(\Phi, \Phi^*) + \Gamma(\Phi, \Phi^*, V) = e^{\mathcal{O}} K(\Phi, \Phi^*) = K(\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}^*). \quad (1.185)$$

最後の表式はケーラーポテンシャル中のカイラル超場 Φ を $\tilde{\Phi}$ に置き換えたものを表す。最後の等号が成り立つことは、エルミートゲージ $M = e^{-V}$ においては $\tilde{\Phi} = e^{\mathcal{O}}\Phi$ であること、そしてエルミートゲージ以外であっても $K(\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}^*)$ がユニタリーゲージ変換で不変であることから従う。

このように、 K がゲージ不変である場合には、プレポテンシャルを直接用いることなく作用を書くことができる。しかし、一般にはプレポテンシャルの寄与をカイラル超場 $\tilde{\Phi}$ の中に埋め込んでしまうことはできないため、どうしてもプレポテンシャルを用いる必要がある。

最後に、§1.7.4 で与えた FI 項は相殺項 Γ の特殊な場合として解釈できることを指摘しておこう。相殺項の構成に用いられるキリングポテンシャル μ_α は (1.154) によって与えられるが、そこで用いられている正則関数 f_α はケーラーポテンシャルのユニタリーゲージ変換 (1.147) によって定義されている。しかし、(1.147) では関数 f_α が $f_\alpha + f_\alpha^*$ の形で含まれるため、その虚部には任意性があり、

$$f_\alpha \rightarrow f_\alpha + i\zeta_\alpha \quad (1.186)$$

のような定数シフトが許される。ただし ζ_α は実定数である。これはキリングポテンシャルを次のようにずらす。

$$\mu_\alpha \rightarrow \mu_\alpha + \zeta_\alpha. \quad (1.187)$$

キリングポテンシャルがゲージ群の随伴表現に属するという要請によって、非可換ゲージ群に対する部分についてこの定数の不定性を固定することができる。しかし $U(1)$ ゲージ群についてはこの定数の不定性は残る。(1.187) のシフトは、相殺項を次のように変化させる。

$$\frac{1}{2}[\Gamma]_D \rightarrow \frac{1}{2}[\Gamma]_D - \int d^4x \zeta_a D^a. \quad (1.188)$$

従って、 ζ_a は確かに FI パラメータを表している。

1.9 ゲージ場が存在する場合のスカラー多様体上の共変性

まずは複素とは限らない一般の多様体上のアイソメトリー-ゲージ化について考えよう。次の作用で与えられる n 個のスカラー場の理論を考える。

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} h_{ij} \partial_\mu q^i \partial^\mu q^j \right] \quad (1.189)$$

q^i は計量が h_{ij} で与えられる n 次元スカラー多様体の座標とみなすことができる。

スカラー多様体がアイソメトリーを持つとし、対応するキリングベクトルを t_a^i とする。このとき上記のラグランジアンは次の大域的対称性のもとで不変である。

$$\delta_{\text{global}} q^i = \epsilon^a X_a q^i = \epsilon^a t_a^i \equiv \epsilon^i \quad (1.190)$$

このアイソメトリー群をゲージ化することを考えよう。パラメータ ϵ^a を時空の場所ごとに異なる座標の関数に一般化し、スカラー場が次のように変換されるとしよう。

$$\delta_{\text{gauge}} q^i = \epsilon^a (x^\mu) t_a^i \quad (1.191)$$

ゲージ場 V_μ^a を導入することにより、このスカラー場 q^i の共変微分を次のように定義する。

$$D^{(G)} q^i = dq^i - V^a t_a^i \quad (1.192)$$

共変微分の肩の G はゲージ対称性に対する共変微分であることを表している。 V_μ^a のゲージ変換は次のように与えられる。

$$\delta_{\text{gauge}} V^a = d\epsilon^a + V^b \epsilon^c f_{bc}^a \quad (1.193)$$

対応する場の強さは次のように与えられる。

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a + V_\mu^b V_\nu^c f_{bc}^a \quad (1.194)$$

共変微分 $D^{(G)} q^i$ のゲージ変換は次のように変換パラメータの微分を含んでいない。

$$\delta_{\text{gauge}} (D^{(G)} q^i) = \epsilon^a (D^{(G)} q^j) \partial_j t_a^i \quad (1.195)$$

共変微分 $D^{(G)}q^i$ がスカラー多様体上の一般座標変換のもとでベクトルとして変換されることは明らかであろう。そこで、そのゲージ変換性 (1.195) をスカラー多様体上の一般のベクトル場のゲージ変換性として採用することができる。すなわち、一般のスカラー多様体上のベクトル場 ψ^i のゲージ変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta_{\text{gauge}}\psi^i &= \epsilon^\alpha \psi^j \partial_j t_\alpha^i \\ &= \epsilon^\alpha \psi^j (D_j t_\alpha^i - \Gamma_{jk}^i t_\alpha^k) \\ &= -\epsilon^\alpha [(\widehat{t}_\alpha + t_\alpha^j \widehat{\Gamma}_j)\psi]^i\end{aligned}\quad (1.196)$$

ここで、 \widehat{t}_α と $\widehat{\Gamma}_k$ はそれぞれ $t_\alpha^i{}_j \equiv \nabla^i t_{\alpha,j}$ と Γ_{kj}^i の行列表示である。すなわち

$$(\widehat{t}_\alpha)^i{}_j = t_\alpha^i{}_j, \quad (\widehat{\Gamma}_k)^i{}_j = \Gamma_{kj}^i \quad (1.197)$$

であり、どちらも ψ^i のベクトル添え字に作用する。スカラー多様体上の一般のテンソル場にしては、 \widehat{t}_α と $\widehat{\Gamma}_k$ を適当な $GL(n)$ の表現に置き換えればよい。

$$\delta_{\text{gauge}}\psi = -\epsilon^\alpha (\widehat{t}_\alpha + t_\alpha^k \widehat{\Gamma}_k)\psi \quad (1.198)$$

(1.198) に従って変換される場に対しては、共変微分を次のように定義することができる。

$$\begin{aligned}D_\mu^{(G,M)}\psi &= D_\mu^{(M)}\psi + V_\mu^\alpha \widehat{t}_\alpha \psi \\ &= \partial_\mu \psi + (\partial_\mu q^i) \widehat{\Gamma}_i \psi + V_\mu^\alpha \widehat{t}_\alpha \psi\end{aligned}\quad (1.199)$$

共変微分の肩に G と M をつけたのは、ゲージ接続の寄与のほかにスカラー多様体の接続の寄与も含まれているからである。スカラー多様体が平坦であり、ゲージ変換が線形である場合には (1.142) に与えた共変微分になる。 t_α がキリングベクトルであることを用いて $D^{(G,M)}\psi$ が共変であること、すなわちゲージ変換が (1.198) によって与えられることを示すことができる。

スカラー場 q^i およびスカラー多様体上の一般のテンソル場 X について、共変微分の交換関係は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}[D_\mu^{(G,M)}, D_\nu^{(G)}]q^i &= -F_{\mu\nu}^\alpha t_\alpha^i, \\ [D_\mu^{(\omega,G,M)}, D_\nu^{(\omega,G,M)}]X &= \left[F_{\mu\nu}^\alpha \widehat{t}_\alpha + (D_\mu^{(G)}q^i)(D_\nu^{(G)}q^j)\widehat{R}_{ij} \right] X.\end{aligned}\quad (1.200)$$

\widehat{R}_{mn} はスカラー多様体の曲率テンソルである。

ここで定義された共変微分などを用いて運動項作用 (1.65) を書き換えればスカラー

多様体上の座標変換のもとでの共変性が明らかな次の表式を得る。

$$\begin{aligned}
S_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}[K(\Phi, \Phi^*) + \Gamma(\Phi, \Phi^*, V)]_D \\
&= \int d^4x \left[-K_{i\bar{j}} D_\mu^{(G)} \phi^i D^{(G)\mu} \bar{\phi}^{\bar{j}} - \frac{1}{2} K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(G,M)} \chi_R^{\bar{j}}) + K_{i\bar{j}} F_{\text{cov}}^i \bar{F}_{\text{cov}}^{\bar{j}} \right. \\
&\quad + \frac{1}{16} R_{i\bar{j}k\bar{l}} (\chi_L^i \chi_L^k) (\chi_R^{\bar{j}} \chi_R^{\bar{l}}) \\
&\quad \left. + t_{\bar{a}}^j K_{\bar{j}k} (\lambda_L^a \chi_L^k) + (\chi_R^{\bar{i}} \lambda_R^a) K_{\bar{i}j} t_{\bar{a}}^j - D^a \mu_a \right] \quad (1.201)
\end{aligned}$$

(1.137) に与えた Fayet-Iliopoulos 項は、キリングポテンシャルの不定性としてこの作用の中に含まれている。さらに、共変化された超対称変換は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta \phi^i &= (\xi_L \chi_L^i), \\
\delta^{\text{cov}} \chi_L^i &= 2\gamma^\mu \xi_R D_\mu^{(G)} \phi^i + 2\xi_L F_{\text{cov}}^i, \\
\delta^{\text{cov}} F_{\text{cov}}^i &= (\xi_R \gamma^\mu D_\mu^{(M,G)} \chi_L^i) - \frac{1}{4} \delta \bar{\phi}^{\bar{j}} R_{\bar{j}k}{}^i{}_{l} (\chi_L^k \chi_L^l) - 2(\xi_R \lambda_R^a) t_{\bar{a}}^i. \quad (1.202)
\end{aligned}$$

ゲージ多重項の運動項も与えておこう。カイラル多重項がある場合には、ゲージ運動項関数 $\tilde{\tau}$ をカイラル多重項の正則関数に一般化することができる。その場合の作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{vector}} &= \frac{1}{2} \text{Im}[\tilde{\tau}_{ab} W_L^a W_L^b]_F \\
&= \text{Im} \tilde{\tau}_{ab} \left[\frac{1}{2} D^a D^b - \frac{1}{2} (\lambda_L^a \gamma^\mu D_\mu^{(G)} \lambda_R^b) + \frac{1}{2} (D_\mu^{(G)} \lambda_L^a \gamma^\mu \lambda_R^b) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \right] \\
&\quad + \text{Re} \tilde{\tau}_{ab} \left[\frac{i}{2} D_\mu^{(G)} (\lambda_L^a \gamma^\mu \lambda_R^b) - \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b \right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{4} \lambda_L^a (D^b + iF_2^b) \tilde{\tau}_{ab,i} \chi_L^i \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{4} (\lambda_L^a \lambda_L^b) \left(\tilde{\tau}_{ab,i} F_{\text{cov}}^i - \frac{1}{4} D_i^{(M)} \partial_j \tilde{\tau}_{ab} (\chi_L^i \chi_L^j) \right) + \text{c.c.} \right] \quad (1.203)
\end{aligned}$$

補助場 F_{cov}^i と D^a の運動方程式を解くことで、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
F_{\text{cov}}^{*\bar{i}} &= K^{\bar{i}j} \left(W_j - \frac{i}{4} \tilde{\tau}_{ab,j} (\lambda_L^a \lambda_L^b) \right), \\
D^a &= (\text{Im} \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \left[\mu_b - \frac{1}{4} \left(\tilde{\tau}_{bc,i} (\lambda_L^c \chi_L^i) + \tilde{\tau}_{bc,\bar{i}}^* (\lambda_R^c \chi_R^{\bar{i}}) \right) \right] \quad (1.204)
\end{aligned}$$

これらを代入して得られるラグランジアンはフェルミオンの 2 次までの項を取ると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\phi &= -K_{i\bar{j}} D_\mu^{(G)} \phi^i D^{(G)\mu} \bar{\phi}^{\bar{j}}, \\
\mathcal{L}_\chi &= -\frac{1}{2} K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(G,M)} \chi_R^{\bar{j}}), \\
\mathcal{L}_{\text{yukawa}} &= t_{\bar{a}}^{\bar{j}} K_{\bar{j}k} (\lambda_L^a \chi_L^k) + (\chi_R^{\bar{i}} \lambda_R^a) K_{\bar{i}j} t_{\bar{a}}^j, \\
\mathcal{L}_{\chi\text{mass}} &= \frac{1}{4} (D_i^{(M)} \partial_j W) (\chi_L^i \chi_L^j) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_v &= \text{Im } \tilde{\tau}_{ab} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \right] + \text{Re } \tilde{\tau}_{ab} \left[-\frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b \right], \\
\mathcal{L}_\lambda &= \text{Im } \tilde{\tau}_{ab} \left[-\frac{1}{2} (\lambda_L^a \gamma^\mu D_\mu^{(G)} \lambda_R^b) + \frac{1}{2} (D_\mu^{(G)} \lambda_L^a \gamma^\mu \lambda_R^b) \right] \\
&\quad + \text{Re } \tilde{\tau}_{ab} \left[\frac{i}{2} D_\mu^{(G)} (\lambda_L^a \gamma^\mu \lambda_R^b) \right], \\
\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{4} \lambda_L^a i K_2^b \tilde{\tau}_{ab, i} \chi_L^i + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{\text{pot}} &= -K^{i\bar{j}} (\partial_i W) (\partial_{\bar{i}} W^*), \\
\mathcal{L}_D &= -\frac{1}{2} (\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_a \mu_b, \\
\mathcal{L}_{D\lambda\chi} &= \frac{1}{4} (\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_a \left(\tilde{\tau}_{bc, i} (\lambda_L^c \chi_L^i) + \tilde{\tau}_{bc, \bar{i}}^* (\lambda_R^c \chi_R^{\bar{i}}) \right), \\
\mathcal{L}_{\lambda\text{mass}} &= \frac{i}{4} K^{i\bar{j}} W_{\bar{i}}^* \tilde{\tau}_{ab, j} (\lambda_L^a \lambda_L^b) + \text{c.c.} \tag{1.205}
\end{aligned}$$

ベクトル多重項とカイラル多重項の変換則は

$$\begin{aligned}
\delta v_\mu^a &= \xi \gamma_\mu \lambda^a, \\
\delta \lambda^a &= -K_2^a \xi + i \gamma_5 \xi (\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_b, \\
\delta \phi^i &= \xi_L \chi_L^i, \\
\delta \chi_L^i &= 2 \gamma^\mu \xi_R D_\mu^{(G)} \phi^i + 2 \xi_L K^{i\bar{j}} \bar{W}_{\bar{j}}. \tag{1.206}
\end{aligned}$$

1.10 カレント

作用がある内部対称性のもとで不変であるとき、それに対応したネーターカレント j_a^μ を定義することができる。このカレントは、ゲージ場 A_m^a を導入して対称性をゲージ化すれば、 A_m^a と物質場の結合項から読み取ることができる。すなわち、ゲージ場 A_m^a はカレント j_a^m と次のように結合する。

$$S = S_0 - \int d^4x A_\mu^a j_a^\mu + \mathcal{O}(A^2) \tag{1.207}$$

ゲージ場の高次の項は無視することにする。作用のゲージ不変性はカレント j が (物質場の運動方程式が成り立つときに) 保存すること、すなわち $\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0$ であることを要求する。

(1.174) に与えた超対称ゲージ理論における相互作用項

$$S = \int d^4\theta \Gamma^{(1)} = - \int d^4\theta V^\alpha \mu_\alpha \quad (1.208)$$

はキリングポテンシャルのスカラー場をカイラル超場で置き換えた

$$J_\alpha = \mu_\alpha(\Phi, \Phi^*) \quad (1.209)$$

がその成分場としてカレントを含むことを意味しており、この超場はカレント超場と呼ばれる。実際

$$J_\alpha = \cdots - i(\theta_L \gamma_m \theta_R) j_\alpha^m + \cdots \quad (1.210)$$

のように成分場として j_α^m を定義すれば、(これは線形多重項の成分場の定義 (1.214) において、ベクトル成分の負号を反転させたものになっている。) これがゲージ場と (1.207) のように結合していることがわかる。

ゲージ不変性がカレント保存則 $\partial_m j_\alpha^m$ を要求するのに対応して、超場 V^α のゲージ変換に対する不変性もカレント超場に条件を課す。プレポテンシャル V^α のゲージ変換は、プレポテンシャルについて高次の項を無視すればカイラル超場 Λ を用いて $\delta V_\alpha = (1/2)(\Lambda_\alpha + \Lambda_\alpha^*)$ と与えられる。この変換則は任意の超場 X を用いて

$$\delta V = D_{\bar{\alpha}} D^{\bar{\alpha}} X + D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} X^* \quad (1.211)$$

と書くことができる。この変換のもとで (1.208) が不変であるためにはカレント超場が次の条件を満足しなければならない。

$$D_{\bar{\alpha}} D^{\bar{\alpha}} J_\alpha = D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} J_\alpha = 0. \quad (1.212)$$

一般に、条件

$$D_{\bar{\alpha}} D^{\bar{\alpha}} L = D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} L = 0. \quad (1.213)$$

を満足する超場は線形超場 (linear superfield) と呼ばれ、対応する多重項は線形多重項 (linear multiplet) と呼ばれる [3]。この名称の由来は、 θ 展開を行ったときに、 θ_L および θ_R の 1 次の項 (線形項) まだが独立な自由度として含まれるからである。線形超場は次のように展開することができる。

$$L = \begin{pmatrix} B & +\theta_L \eta_L & & \\ +\theta_R \eta_R & i(\theta_L \gamma^m \theta_R) v_m & -\frac{1}{2} \theta_L^2 (\theta_R \gamma^m \partial_m \eta_L) & \\ & -\frac{1}{2} \theta_R^2 (\theta_L \gamma^m \partial_m \eta_R) & +\frac{1}{4} \theta_L^2 \theta_R^2 \partial^2 B & \end{pmatrix} \quad (1.214)$$

ただし、ベクトル成分 v_m は次の拘束条件を満足していなければならない。

$$\partial_m v^m = 0. \quad (1.215)$$

成分場の変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta B &= (\xi\eta), \\ \delta\eta_L &= \gamma^m \xi_R (\partial_m B + i v_m), \\ \delta v^m &= -i\xi\gamma_5 \gamma^{nm} \partial_n \eta. \end{aligned} \quad (1.216)$$

(1.209) によって与えられるカレント超場が実際に線形多重項に属していることを、カイラル超場の運動方程式を用いて示しておこう。ここではカイラル多重項のみからなる次の系を考える。

$$S = \frac{1}{2} [K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}})]_D - ([W(\Phi^i)]_F + \text{c.c.}) \quad (1.217)$$

カイラル超場に対する運動方程式を超場形式で求めるには作用 (1.217) をカイラル超場で変分すればよいが、その際カイラル条件を破らないような変分だけが許されるといことに注意しなければならない。そこで変分を $\delta\Phi^i = D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} X^i$ とおこう。 X^i はカイラルとは限らない任意の超場である。この変分による作用の変化は次のようになる。

$$\delta S = \frac{1}{2} [K_i D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} X^i]_D - [W_i D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} X^i]_F = \left[\frac{1}{2} X^i (D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} K_i - 4W_i) \right]_D \quad (1.218)$$

X^i は任意の超場であるから、この式が 0 になるための条件として次の運動方程式が得られる、

$$D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} K_i - 4W_i = 0 \quad (1.219)$$

この運動方程式を用いると、カレント超場 (1.209) に共変微分を二回作用させたものを超ポテンシャルを用いて書き換えることができる。

$$D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} J_a = -i D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} (t_a^i K_i + 4f_a) = -i t_a^i D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} K_i = -4i W_i t_a^i = 0. \quad (1.220)$$

最初の式変形にキリングポテンシャルの満足する関係式 (1.154) を用い、最後に超ポテンシャルがゲージ不変であるという仮定を用いた。この複素共役 $D_{\underline{a}} D^{\underline{a}} J_a$ についても全く同様に 0 であることが示される。従って、 J_a は確かに線形超場になっている。

内部対称性だけでなく、並進対称性に関するカレントであるエネルギー運動量テンソルも超場の成分として表すことができる。並進対称性のパラメータはローレンツベクトルであるから、対応するカレント超場は内部対称性の添え字 a の代わりにローレンツベクトル添え字を持つ実超場であると考えられる。この実超場を J_m としよう。 J_m の成分場のうち B_m と η_m 、 v_{nm} を次のように定義する。

$$J_m = B_m + \theta\eta_m + i(\theta_L \gamma^n \theta_R) v_{nm} + \dots \quad (1.221)$$

内部対称性に対するカレント超場と同様に J_m も線形超場であり

$$D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}J_m = D_aD^aJ_m = 0 \quad (1.222)$$

を満足すると仮定してみよう。

J_m の成分は全てベクトル添え字 m を持つから、どれも何らかのカレントであろうと期待される。それらがどのような対称性のカレントであるのかを見るために、それらを積分してチャージを定義し、その超対称変換がどうなるかを見てみよう。変換則 (1.216) を用いれば、次の変換が得られる。

$$\begin{aligned} \delta \int B^0 &= \xi \int \eta^0, \\ \delta \int \eta_L^0 &= i(\gamma^n \xi_R) \int v_n^0, \\ \delta \int v_n^0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.223)$$

ここで、 \int は 3 次元空間全体での積分を表している。遠方では場が十分早く 0 に漸近することを仮定して表面項を落とした。また、チャージが保存することを仮定して時間微分項も無視した。この変換則は B^m と η^m がそれぞれ R カレントと超対称カレントであることを示唆している。実際

$$\hat{P}_m = - \int v_m^0, \quad \hat{Q} = 2i\gamma_5 \int \eta^0, \quad \hat{A} = -2 \int B^0 \quad (1.224)$$

とにおいて、上記の変換則を $\delta^* = [i\xi^a \hat{Q}_a, *]$ のように超対称電荷との交換関係によって表せば、次のような交換関係が得られる。

$$\begin{aligned} [i\xi^b \hat{Q}_b, i\hat{Q}_{\bar{a}}] &= -2i\xi^b (\gamma^n)_{\bar{b}a} \hat{P}_n, \\ [i\xi^a \hat{Q}_a, \hat{P}_m] &= 0, \\ [i\xi^a \hat{Q}_a, \hat{A}] &= i\xi^{\bar{a}} \hat{Q}_{\bar{a}} - i\xi^a \hat{Q}_a. \end{aligned} \quad (1.225)$$

最初の二つはポアンカレ代数にある交換関係に一致する。最後のものは、 \hat{A} が R 電荷であることを意味している。

このように R 電荷がエネルギー運動量テンソル、超対称電荷と一つの超対称多重項をなすということは重要である。一般の超対称理論においては R 対称性は必ずしも保存しないがそのような理論であっても、超重力理論を構成するにあたっては隠れた対称性として重要な役割を果たす。そこでしばらく理論が R 対称性を持つことを仮定しよう。

上では J_m に含まれる全てのカレントが保存することを仮定して対応する電荷の超対称変換を導いたが、このカレントの保存則は J_m が線形超場であるという条件からは得られない。また、エネルギー運動量テンソルに対応すると考えられる成分場 v_{nm}

は対称テンソルではない。カレントの保存を保障し、成分場 v_{nm} の対称部分だけが独立な自由度になるようにするためには、(1.222) よりも強い条件

$$(\gamma^m)^{ab} D_b J_m = 0 \quad (1.226)$$

を課す必要がある。この条件は (1.222) とは独立な条件ではなく (1.226) が成り立てば (1.222) も自動的に成り立つ。この新たな条件は、 v_{nm} の反対称部分を次のように決める。

$$v_{nm}^{(a)} = \frac{1}{2} \tilde{B}_{nm} \quad (1.227)$$

ただし、 v_{nm} を次のように対称部分と反対称部分に分けた。

$$v_{nm} = v_{nm}^{(s)} + v_{nm}^{(a)} \quad (1.228)$$

また \tilde{B}_{mn} は次のように定義される。

$$B_{nm} = \partial_n B_m - \partial_m B_n, \quad \tilde{B}_{nm} = \frac{1}{2} \epsilon_{nmpq} B^{pq} \quad (1.229)$$

また、全ての成分場が保存則を満足する。

$$\partial_m B^m = \partial_m \eta^m = \partial_m v^{(s)mn} = 0, \quad (1.230)$$

さらに条件式 (1.226) はこれらの保存則以外にも次の関係式を与える。

$$\gamma_m \eta^m = v_m^{(s)m} = 0. \quad (1.231)$$

(1.224) に対応するカレントの式を与えておこう。

$$j_R^m = -2B^m, \quad j_Q^m = 2i\gamma^5 \eta^m, \quad T_{mn} = v_{mn}^{(s)}. \quad (1.232)$$

上でも述べたようにここでは理論に R 対称性が存在することを仮定しており、そのために R カレントについても保存則 (1.230) が成り立つ。さらに関係式 (1.231) は $x^n v_{nm}^{(s)}$ や $x^m \gamma_m \eta^m$ も保存カレントになることを保障している。実はこれらの保存カレント全体は超共形代数をなす。すなわち、超カレント J_m が (1.226) を満足するような理論は超共形場理論に限られる。超共形対称性を持たない、一般の超対称理論に対する超カレントに対する条件式はあとで与える。

超カレントの具体形を見るために、再び作用が (1.217) で与えられる理論を考えよう。ここでは超共形対称性の存在を仮定する。カイラル超場 Φ^i の R 電荷を r_i とする。すなわち、 $U(1)_R$ 変換を次のように仮定する。

$$\phi^i \rightarrow e^{ir_i \alpha} \phi^i, \quad \chi^i \rightarrow e^{i(r_i - 1)\alpha} \chi^i \quad (1.233)$$

作用が超共形代数のもとで不変であるためにはケーラーポテンシャルと超ポテンシャルが次の条件を満足している必要がある。

$$\sum r_i K_i \Phi^i = \sum r_i K_{\bar{i}} \Phi^{*\bar{i}} = \frac{2}{3} K, \quad \sum r_i W_i \Phi^i = 2 \quad (1.234)$$

まず、初項 B_m を求めよう。(1.232) より、R カレントの $-1/2$ 倍が超場 J^m の初項成分 B^m を与える。作用 (1.65) が変換 (1.233) のもとで不変であると仮定してネーターカレントを求めると

$$B^m = -\frac{1}{2}j_R^m, \quad j_R^m = \frac{2i}{3}K_i\partial^m\phi^i - \frac{2i}{3}K_{\bar{i}}\partial^m\phi^{*\bar{i}} + \frac{i}{6}K_{i\bar{j}}\chi_{\bar{a}}^i(\gamma^m)^{\bar{a}b}\chi_{\underline{b}}^{\bar{j}} \quad (1.235)$$

となる。これを超場 J^m に拡張するのは簡単である。

$$J_m = -\frac{i}{3}K_i\partial_m\Phi^i + \frac{i}{3}K_{\bar{i}}\partial_m\Phi^{*\bar{i}} - \frac{i}{12}(\gamma_m)^{\bar{a}b}K_{i\bar{j}}D_{\bar{a}}\Phi^i D_{\underline{b}}\Phi^{*\bar{j}} \quad (1.236)$$

初項以外の成分を抜き出すと

$$\eta_L^m = -\frac{i}{3}\partial_m(K_i\chi_L^i) + \frac{2i}{3}K_{i\bar{j}}\chi_L^i\partial_m\phi^{*\bar{j}} + \frac{i}{6}K_{i\bar{j}}(\gamma^n\gamma^m\chi_L^i)\partial_n\phi^{*\bar{j}} + \frac{i}{6}K_{i\bar{j}}F_{\text{cov}}^i(\gamma^m\chi_R^{\bar{j}}) \quad (1.237)$$

$$\begin{aligned} v_{nm} = & -\frac{1}{3}\partial_n\partial_m K + 2K_{i\bar{j}}(\partial_{\{n}\phi^i})(\partial_{m\}\phi^{*\bar{j}}) \\ & -\frac{1}{3}\eta_{mn}K_{i\bar{j}}(\partial_p\phi^i)(\partial^p\phi^{*\bar{j}}) + \frac{i}{3}\epsilon_{nmpq}K_{i\bar{j}}(\partial^p\phi^i)(\partial^q\phi^{*\bar{j}}) \\ & + \frac{1}{3}K_{i\bar{j}}F_{\text{cov}}^i F_{\text{cov}}^{*\bar{j}}\eta_{mn} + \frac{1}{48}R_{k\bar{l}\bar{j}}(\chi_L^k\chi_L^{\bar{l}})(\chi_R^{\bar{i}}\chi_R^{\bar{j}})\eta_{mn} \\ & + \frac{1}{6}K_{i\bar{j}}(\chi_R^{\bar{j}}\gamma_n D_m^{(M)}\chi_L^i) + \frac{1}{6}K_{i\bar{j}}(\chi_L^j\gamma_n D_m^{(M)}\chi_R^{\bar{i}}) \\ & - \frac{1}{12}K_{i\bar{j}}(\chi_R^{\bar{j}}\gamma_m\gamma_{np}D^{(M)p}\chi_L^i) - \frac{1}{12}K_{i\bar{j}}(\chi_L^j\gamma_m\gamma_{np}D^{(M)p}\chi_R^{\bar{i}}) \end{aligned} \quad (1.238)$$

運動方程式を用いることでこの超カレントが (1.226) を満足することを示しておこう。まず、超カレント (1.236) に微分を作用させることで

$$D_{\underline{b}}J^{\bar{a}b} = -\frac{i}{3}D_{\underline{b}}K_i\partial^{\bar{a}b}\Phi^i + \frac{i}{3}D_{\underline{b}}(K_{\bar{i}}\partial^{\bar{a}b}\Phi^{\bar{i}}) + \frac{i}{6}D_{\underline{b}}(D^{\bar{a}}\Phi^i D^b K_i) \quad (1.239)$$

となるが、第 2 項と第 3 項は運動方程式などを用いず、共変微分の交換関係のみを用いて次のように変形することができる。

$$\frac{i}{3}D_{\underline{b}}(K_{\bar{i}}\partial^{\bar{a}b}\Phi^{\bar{i}}) = \frac{i}{12}D^{\bar{a}}D_{\underline{b}}D^b K - \frac{i}{12}(D_{\underline{b}}D^b K_i)D^{\bar{a}}\Phi^i, \quad (1.240)$$

$$\frac{i}{6}D_{\underline{b}}(D^{\bar{a}}\Phi^i D^b K_i) = \frac{i}{3}(\partial^{\bar{a}b}\Phi^i)D_{\underline{b}}K_i - \frac{i}{6}(D^{\bar{a}}\Phi^i)D_{\underline{b}}D^b K_i \quad (1.241)$$

これを代入すれば次の式を得る。

$$D_{\underline{b}}J^{\bar{a}b} = \frac{i}{8}D^{\bar{a}}((D_{\underline{b}}D^b K_i)r_i\Phi^i) - \frac{i}{4}(D_{\underline{b}}D^b K_i)D^{\bar{a}}\Phi^i \quad (1.242)$$

理論がコンフォーマルであるという仮定より従う K に対する条件 (1.234) を用いた。さらに、(1.234) にある超ポテンシャルに対する関係式を微分して得られる

$$0 = -\frac{i}{2}D^{\bar{a}}(W_i r_i \Phi^i) + iW_i D^{\bar{a}}\Phi^i \quad (1.243)$$

を加えることにより、ケーラーポテンシャルの微分と超ポテンシャルを運動方程式 (1.219) の形にまとめることができる。

$$D_{\underline{b}}J^{\bar{a}b} = \frac{i}{8}D^{\bar{a}}((D_{\underline{b}}D^bK_i - 4W_i)r_i\Phi^i) - \frac{i}{4}(D_{\underline{b}}D^bK_i - 4W_i)D^{\bar{a}}\Phi^i \quad (1.244)$$

ここまでの式変形ではまだ運動方程式を用いていない。運動方程式 (1.219) を用いると、(1.244) の右辺は 0 になる。

ここまでは、理論が超共形対称性を持つことを仮定してきた。この結果を利用して共形対称性が無い場合の超カレントを求めるには、補正場 (compensator) と呼ばれる場を用いるのが便利である。一般に、超共形代数を満足しない理論においてはケーラーポテンシャルと超ポテンシャルが正しいウェイトを持たず、条件 (1.234) が満足されない。そこで、このウェイトのずれを補正するために 0 でない R 電荷を持つカイラル超場 Φ_{comp} を導入し、ケーラーポテンシャルや超ポテンシャルの各項に Φ_{comp} の適当なべきをかけることでウェイトをあわせる。こうして一旦理論に超共形不変性を持たせたあとで、 $\Phi_{\text{comp}} = 1$ と置くことで対称性を破る。

Φ_{comp} はここでは R チャージ $2/3$ を持つものとし、それ以外の全ての場合は R-チャージを持たないものとしよう。これらをまとめて Φ^i と表し、 $\Phi^0 = \Phi_{\text{comp}}$ とする。それ以外の場合は $\Phi^{i'}$ ($i' = 1, 2, \dots$) と表すことにする。コンフォーマル不変性を回復したケーラーポテンシャルは次のように与えられる。

$$K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}}) = \Phi_{\text{comp}}\Phi_{\text{comp}}^*k(\Phi^{i'}, \Phi^{*\bar{i}'}), \quad W(\Phi^i) = \Phi_{\text{comp}}^3w(\Phi^{i'}). \quad (1.245)$$

k と w が共形対称性を持たない理論のケーラーポテンシャルと超ポテンシャルである。

このように補正した理論においては超カレントは (1.236) によって定義される。この超カレントについて上で行った DJ の計算を繰り返すと、 Φ_{comp} が力学変数ではなく、対応する運動方程式を用いることができないため、(1.244) の中で Φ_{comp} の「運動方程式」の部分だけが残り、それは次のようになる。

$$D_{\underline{b}}J^{\bar{a}b} = i\Phi_{\text{comp}}^3D^{\bar{a}}\left[\Phi_{\text{comp}}^{-3}\left(\frac{1}{12}D_{\underline{b}}D^bK - W\right)\right] \quad (1.246)$$

共形対称性を持たないものとの理論の超カレントに対する式は補正場に $\Phi_{\text{comp}} = 1$ を代入することにより次のようになる。

$$(\gamma^m)^{\bar{a}b}D_{\underline{b}}J_m = D^{\bar{a}}N \quad (1.247)$$

ただし、 N は次のように与えられるカイラル超場である。

$$N = \frac{i}{12}D_{\underline{b}}D^bK - iW. \quad (1.248)$$

実ベクトル超場 $J_m = (B_m, \eta_m, C_m, v_{nm}, \lambda_m, D_m)$ およびカイラル超場 $N = (\phi, \chi, F)$ が関係式 (1.247) を満足している場合、独立な成分場は $(\phi, B_m, \eta_m, v_{nm}^{(s)})$

のみであり、それ以外の成分はこれら独立な場を用いて以下のように与えることができる。

$$\begin{aligned}
C_m &= -\frac{1}{2}\partial_m\phi^*, \\
v_{nm}^{(a)} &= \frac{1}{2}\tilde{B}_{nm}, \\
\lambda_n &= i\gamma_5\gamma^m(\partial_n\eta_m - \partial_m\eta_n), \\
D_m &= -\partial_n B^{nm} \\
F &= \frac{1}{2}(\partial_m B^m - iv_m^{(s)m}), \\
\chi &= \gamma_m\eta^m.
\end{aligned} \tag{1.249}$$

ただし、 $B_{mn} = \partial_m B_n - \partial_n B_m$ 。さらに、 η と $v^{(s)}$ は次の式を満足する。

$$\begin{aligned}
\partial_n(v_m^{(s)n} - \delta_m^n v_p^{(s)p}) &= 0, \\
\partial_n(\gamma^{nm}\eta_m) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.250}$$

これらの式はエネルギー運動量テンソルと超対称カレント

$$\begin{aligned}
T_{nm} &= v_{nm}^{(s)} - \eta_{nm}v_p^{(s)p}, \\
j_Q^m &= -2i\gamma^5\gamma^{mn}\eta_n.
\end{aligned} \tag{1.251}$$

の保存則にほかならない。

ここまでで得られた結果をまとめておこう。超対称理論において、エネルギー運動量テンソル T_{mn} が属する超対称多重項は、拘束条件 (1.247) を満足するベクトル超場 J_m とカイラル超場 N の組 (J_m, N) によって与えられる。従って、この系を重力に結合した場合には、アインシュタイン方程式 $G_{mn} = (k^2/2)T_{mn}$ も次のように超場の関係式に拡張される。

$$V_m = -\frac{3k^2}{8}J_m, \quad \mathcal{R} = -\frac{ik^2}{2}N \tag{1.252}$$

ここで、 (V_m, \mathcal{R}) は超重力理論の自由度を含むベクトル超場とカイラル超場の組である。これらが実際に運動方程式として超重力理論として与えられることは後に確認する。また、エネルギー運動量テンソルの保存則が曲率テンソルのビアンキ恒等式によって保障されることの拡張として、関係式 (1.247) の成立は重力多重項 (V_m, \mathcal{R}) が満足する関係式

$$\gamma^m D_R V_m = -\frac{3i}{4}D_L \mathcal{R} \tag{1.253}$$

によって保障される。この関係式は超空間上のビアンキ恒等式から導かれる。

最後に、超対称性カレントの具体的表式を与えておこう。これらのカレントの導出は、ネーター処方によって超重力理論を構成する手続きの第一ステップとなる。

作用が

$$S = \frac{1}{2}[K(\Phi^i, \Phi^{*\bar{i}})]_D - ([W(\Phi^i)]_F + \text{c.c.}) \quad (1.254)$$

で与えられる理論について、(1.251) に (1.237) を代入することにより、超対称カレントが次のように得られる。

$$j_{QL}^m = -K_{i\bar{j}}\gamma^n\gamma^m\chi_L^i\partial_n\phi^{*\bar{j}} + K_{i\bar{j}}F_{\text{cov}}^i\gamma^m\chi_R^{\bar{j}} - \frac{2}{3}\partial_n(\gamma^{mn}K_i\chi_L^i) \quad (1.255)$$

最後の項は保存則に寄与しない項である。

作用が

$$S = -\frac{1}{2}[\text{tr}\widetilde{W}\widetilde{W}]_F \quad (1.256)$$

と与えられるゲージ多重項に対しては R-カレントが

$$J_R^m = i\text{tr}(\lambda_L\gamma^m\lambda_R) \quad (1.257)$$

と与えられるから、 $B^m = -(1/2)J_R^m$ を初項とする超カレントは次のように与えられる。

$$J^m = -\frac{i}{2}\text{tr}(\widetilde{W}_L\gamma^m\widetilde{W}_R) \quad (1.258)$$

この成分場である超対称性カレントは次のように与えられる。

$$j_{QL}^m = \text{tr}((\mathbb{F} + iD)\gamma^m\lambda_R) \quad (1.259)$$

第2章 成分形式

2.1 単純超重力理論

4次元で重力多重項のみを含む最も単純な超重力理論は力学変数として多脚場 e_μ^m とグラビティーノ ψ_μ を含み、ラグランジアンは次のように与えられる。[20, 21]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{grav}} &= \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\psi, \\ \mathcal{L}_e &= \frac{e}{k^2} R^{(\omega)}, \\ \mathcal{L}_\psi &= -4e\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega)} \psi_\rho.\end{aligned}\tag{2.1}$$

このラグランジアンは次の超対称変換の下で不変である。

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{k} D_\mu^{(\omega)} \xi,\tag{2.2}$$

$$\delta e_\mu^m = 2k(\xi\gamma^m\psi_\mu).\tag{2.3}$$

スカラー曲率は

$$R^{(\omega)} = e_m^\mu e_n^\nu R_{\mu\nu}^{(\omega)mn}(\omega)\tag{2.4}$$

と定義されており、曲率テンソルはスピン接続だけを用いて

$$R_{\mu\nu}^{(\omega)mn} = \partial_\mu\omega_\nu^{mn} - \partial_\nu\omega_\mu^{mn} + \omega_\mu{}^m{}_k\omega_\nu{}^{kn} - \omega_\nu{}^m{}_k\omega_\mu{}^{kn}\tag{2.5}$$

と与えられる。また、グラビティーノの共変微分もスピン接続を用いて

$$D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho = \partial_\nu\psi_\rho + \frac{1}{4}\omega_\nu{}^{mn}\gamma_{mn}\psi_\rho\tag{2.6}$$

と定義される。

さらに、ラグランジアンを完全に定義するには、スピン接続を多脚場とグラビティーノを用いて書き下す必要がある。そのためには、換率を決めてやる必要がある。換率は次のように定義される。

$$T^m = De^m\tag{2.7}$$

テンソル添え字を露にして書くと次のようになる。

$$T_{\mu\nu}{}^m = D_\mu^{(\omega)}e_\nu^m - D_\nu^{(\omega)}e_\mu^m = \partial_\mu e_\nu^m - \partial_\nu e_\mu^m + \omega_\mu{}^m{}_n e_\nu^n - \omega_\nu{}^m{}_n e_\mu^n\tag{2.8}$$

(2.8) をスピン接続 $\omega_{\mu mn}$ について解けば次の式を得る。

$$\omega_{\lambda mn}(e) + \frac{1}{2}(T_{mn-\lambda} - T_{\lambda m-n} + T_{\lambda n-m}) \quad (2.9)$$

ただし、 $\omega_{\lambda mn}(e)$ は捺率を 0 として (2.8) を解いたときに得られるスピン接続であり、 e_μ^m だけを用いて次のように与えられる。

$$\omega_{\lambda-\mu\nu}(e) = \frac{1}{2}(-e_{\nu k}\partial_\mu e_\lambda^k + e_{\mu k}\partial_\nu e_\lambda^k + e_{\nu k}\partial_\lambda e_\mu^k - e_{\mu k}\partial_\lambda e_\nu^k - e_{\lambda k}\partial_\mu e_\nu^k + e_{\lambda k}\partial_\nu e_\mu^k) \quad (2.10)$$

(ただし、 $\omega_{\mu mn}$ を含む式を e_μ^m で書き換える場合、この式よりも (2.8) を用いるほうが便利ことが多い。)

あとは、捺率を何らかの方法によって与えれば上記の作用が多脚場とグラビティーノの汎関数として与えられる。単純超重力理論において、捺率は通常次のように与えられる。

$$T_{\mu\nu}^k = 2k^2(\psi_\mu\gamma^k\psi_\nu) \quad (2.11)$$

これを得るにはいくつかの方法がある。以下では 1.5 階方式に従う。

成分場を用い、ネーター手続きによってラグランジアンを構成する場合、捺率は実はどのようにとっても良い。例えば、(2.1) に与えたグラビティーノのラグランジアンは、捺率を 0 としたときのスピン接続 $\omega(e)$ を用いても次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_\psi = -4e\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega(e))}\psi_\rho - e\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{mn}\psi_\rho \left(\frac{1}{2}T_{mn-\nu} - T_{\nu m-n} \right). \quad (2.12)$$

このとき、 $T_{\mu\nu}^\lambda$ が捺率であるということを忘れて、単に (2.11) で定義されるテンソルだとみなすことができる。つまり、捺率がどのように与えられようと、相互作用項を適当に与えることで同じラグランジアンを書くことができる。従って、捺率をどのように取るべきかは、どのような捺率を採用すると計算が楽かということで決めるのがよい。

計算を楽にする一つの方法はラグランジアン (2.1) に含まれるスピン接続 ω_μ^{mn} を独立な場だと思って運動方程式を解くことによって ω を決めるというものである。これにより ω が多脚場とグラビティーノの関数として与えられ、捺率も一意的に定まる。この方法は 1.5 階方式として知られている。このように捺率を決めた場合、ラグランジアンが超対称変換で不変かどうかをチェックする際に、スピン接続に含まれる多脚場やグラビティーノについては超対称変換をする必要がない。たとえ超対称変換をしたとしても、スピン接続の任意の変分に対してラグランジアンは不変であるから、新たな項を与えない。このことで計算の手間をかなり減らすことができる。

実際にこの方法でスピン接続を決めたときに捺率 (2.11) が得られることを確かめておこう。まず、アインシュタイン作用をスピン接続で変分すると、

$$\begin{aligned} \delta_\omega \mathcal{L}_e &= \frac{2e}{k^2} e_m^\mu e_n^\nu D_\mu^{(\omega)} \delta\omega_\nu^{mn} \\ &= \frac{e}{k^2} (T_{mn}^k e_k^\nu + T_{km}^k e_n^\nu + T_{nk}^k e_m^\nu) \delta\omega_\nu^{mn} \end{aligned} \quad (2.13)$$

二行目への移行に部分積分を行った。もし擦率がなければ一行目は全微分であるから、部分積分を行うと 0 になるが、擦率がある場合にはそれによる補正項が残される。

一方、グラビティーノの作用の共変微分中のスピン接続の変分からは

$$\delta_\omega \mathcal{L}_\psi = -e\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \delta\omega_\nu{}^{mn} \gamma_{mn} \psi_\nu \quad (2.14)$$

を得る。従って、 ω に対する運動方程式は

$$T_{mn}^k e_k^\nu + T_{km}^k e_n^\nu + T_{nk}^k e_m^\nu = k^2 \psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \psi_\rho \quad (2.15)$$

となる。右辺の γ 行列の積 $\gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} = \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \rangle_1 + \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \rangle_3 + \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \rangle_5$ のうち、 $\langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \rangle_3$ は二つのグラビティーノの入れ替えの対称性から 0 になり、 $\langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \rangle_5$ も 4 次元では 0 になるので、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} k^2 \psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \psi_\rho &= k^2 \psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{mn} \rangle_1 \psi_\rho \\ &= 2k^2 (\psi_m \gamma^k \psi_n) e_k^\nu + 2k^2 (\psi_n \gamma^k \psi_k) e_m^\nu + 2k^2 (\psi_k \gamma^k \psi_m) e_n^\nu \end{aligned} \quad (2.16)$$

これを (2.15) に代入すれば次の式が得られる。

$$T_{mn}^k e_k^\nu + T_{km}^k e_n^\nu + T_{nk}^k e_m^\nu = 2k^2 (\psi_m \gamma^k \psi_n) e_k^\nu + 2k^2 (\psi_n \gamma^k \psi_k) e_m^\nu + 2k^2 (\psi_k \gamma^k \psi_m) e_n^\nu \quad (2.17)$$

もし擦率が (2.11) のように与えられればこの式が成り立つことは直ちにわかる。また逆に、適当に添え字を入れ替えて足し引きすることでこの式を直接解くことができ、その結果 (2.11) が唯一の解として得られることも簡単に確かめられる。

擦率が (2.11) のように与えられるとして (2.1) のラグランジアンが局所的超対称変換 (2.3) の下で不変であることを確認しよう。

アインシュタイン作用に含まれる多脚場の変分は、

$$\delta \mathcal{L}_e = \frac{e}{k^2} \delta e_\mu^m (e_\mu^m R^{(\omega)} - 2R_m^{(\omega)\mu}), \quad (2.18)$$

と与えられる。擦率として 1.5 階方式で得られるものを採用しているので、スピン接続の超対称変換は考える必要がない。

グラビティーノの運動項に含まれるグラビティーノの変換は

$$\begin{aligned} \delta_\psi \mathcal{L}_\psi &= -\frac{4e}{k} \psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega)} D_\rho^{(\omega)} \xi - \frac{4e}{k} D_\mu^{(\omega)} \xi \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega)} \psi_\rho \\ &= -\frac{4e}{k} \psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega)} D_\rho^{(\omega)} \xi + \frac{4e}{k} D_\nu^{(\omega)} \psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\rho^{(\omega)} \xi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

となるが、二つの項は、もし擦率が無ければ部分積分で等しい。

擦率がある場合には、第 2 項を部分積分で第 1 項の形にしたときに擦率を含む項が

現れる。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_\psi &= -\frac{4e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}[D_\nu^{(\omega)}, D_\rho^{(\omega)}]\xi) \\ &\quad + \frac{4e}{k}T_{k\nu}^k(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\rho^{(\omega)}\xi) + \frac{2e}{k}T_{nm}^\mu(\psi_\mu\gamma^{mnp}D_\rho^{(\omega)}\xi) + \frac{2e}{k}T_{np}^\rho(\psi_\mu\gamma^{\mu np}D_\rho^{(\omega)}\xi)\end{aligned}\quad (2.20)$$

1 行目は共変微分の交換関係から曲率テンソルが得られる。2 行目はよく見ると、上付き添え字の入れ替えの下で完全反対称である。従って次のように書くことができる。

$$\delta\mathcal{L}_\psi = -\frac{e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{mn}\xi)R_{\nu\rho mn}^{(\omega)} + \frac{8e}{k}T_{\kappa\nu}^{[\kappa}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho]}D_\rho^{(\omega)}\xi)\quad (2.21)$$

(2.21) の第 1 項の γ 行列の積を計算すると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}-\frac{e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{mn}\xi)R_{\nu\rho mn}^{(\omega)} &= -\frac{e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho mn}\xi)R_{\nu\rho mn}^{(\omega)} \\ &\quad + \frac{4e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\xi)R_{\nu\rho}^{(\omega)} + \frac{2e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\nu\rho\sigma}\xi)R_{\nu\rho\sigma}^{(\omega)\mu} \\ &\quad + \frac{2e}{k}(\psi_\mu\gamma^\mu\xi)R^{(\omega)} - \frac{4e}{k}(\psi_\mu\gamma^\nu\xi)R_\nu^{(\omega)\mu}\end{aligned}\quad (2.22)$$

ただし、 $R_{\mu\nu}^{(\omega)} = R_{\mu\lambda\nu}^{(\omega)\lambda}$ である。このテンソルは捩率がある場合には対称テンソルにならないことに注意しよう。また、捩率が 0 でない場合には $R_{[\nu\rho\sigma]}^{(\omega)\mu}$ も 0 にはならない。4 次元では $\gamma^{\mu\nu\rho mn} = 0$ であるから 1 行目は 0 である。3 行目は (2.18) と相殺する。

(2.21) の二つ目の項は実は 0 であることが次のようにして示される。まず、上付き添え字の反対称性から、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{e}{k}T_{\kappa\nu}^{[\kappa}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho]}D_\rho^{(\omega)}\xi) &= -\frac{e}{24k}T_{\kappa\nu}^{\kappa'}(\psi_\mu\gamma^{\mu'\nu'\rho'}D_\rho^{(\omega)}\xi)\epsilon_{\kappa'\mu'\nu'\rho'}\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho} \\ &= -\frac{ie}{4k}T_{\kappa\nu}^\lambda(\psi_\mu\gamma_\lambda\gamma^5D_\rho^{(\omega)}\xi)\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}\end{aligned}\quad (2.23)$$

さらに捩率の具体形 (2.11) を代入すれば

$$-ike(\psi_{L\kappa}\gamma^\lambda\psi_{R\nu})(\psi_{R\mu}\gamma_\lambda D_\rho^{(\omega)}\xi_L)\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho} + \text{c.c.}\quad (2.24)$$

となる。中央の $\psi_{R\nu})(\psi_{R\mu}$ の部分に対してフィルツ変換を行うことを考えよう。 μ と ν についての反対称性より、フィルツ変換を行うとこの部分是对称なスピノル添え字をもつ行列 γ_{mn} に置き換えられる。しかし、4 次元では $\gamma^\lambda\gamma_{mn}\gamma_\lambda = 0$ が成り立つのでこの式は 0 である。従って、ここまでで相殺されずに残ったのは次のものである。

$$\delta\mathcal{L} = \left(-\frac{4ie}{k}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}(\xi_L\gamma_\lambda\psi_{R\mu})R_{\nu\rho}^{(\omega)} - \frac{2ie}{k}\epsilon^{\nu\rho\sigma\lambda}(\xi_L\gamma_\lambda\psi_{R\mu})R_{\nu\rho\sigma}^{(\omega)\mu} + \text{c.c.}\right) + \delta_e\mathcal{L}_\psi\quad (2.25)$$

まず、グラビティーノ運動項に含まれる多脚場の変分を計算しよう。グラビティーノ運動項ラグランジアンは次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L}_\psi = 4ie\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\psi_\mu\gamma^5\gamma_\sigma D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho \quad (2.26)$$

ただし、ここでは $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を (テンソル密度ではなく) テンソルとして定義した。従って $e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は多脚場に依存せず、超対称変換すべきなのは $\gamma_\sigma = \gamma_k e_\sigma^k$ に含まれる多脚場のみである。従って多脚場を変換すると

$$\begin{aligned} \delta_e \mathcal{L}_\psi &= 8ike\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\xi_L\gamma^k\psi_{R\sigma})(\psi_{L\mu}\gamma_k D_\nu^{(\omega)}\psi_{R\rho} - \psi_{R\mu}\gamma_k D_\nu^{(\omega)}\psi_{L\rho}) + \text{c.c.} \\ &= -16ike\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\xi_L\gamma_k\psi_{R\sigma})(-\psi_{L\mu}\gamma^k D_\nu^{(\omega)}\psi_{R\rho} + \frac{1}{8k^2}D_\nu^{(\omega)}T_{\mu\rho}^k) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.27)$$

この最後の表式の第1項は (2.24) と同じ理由で 0 であることが示される。第2項は次のビアンキ恒等式を用いて曲率の式に書き換えることができる。

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\nu^{(\omega)}T_{\mu\rho}^k = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\nu^{(\omega)}D_\mu^{(\omega)}e_\rho^k = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\nu\mu}^{(\omega)k}te_\rho^l = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho}^{(\omega)k} \quad (2.28)$$

この結果、

$$\delta_e \mathcal{L}_\psi = \frac{2ie}{k}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\xi_L\gamma_k\psi_{R\sigma})R_{\mu\nu\rho}^{(\omega)k} + \text{c.c.} \quad (2.29)$$

が得られる。これを再び (2.25) に代入すれば

$$\delta \mathcal{L} = \frac{4ie}{k}(\xi_L\gamma_\lambda\psi_{R\mu})\left(\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}R_{\nu\rho}^{(\omega)} + \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma}R_{\nu\rho\sigma}^{(\omega)\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\nu\rho\sigma}^{(\omega)\lambda}\right) + \text{c.c.} \quad (2.30)$$

この式の括弧の中は 0 である。実際、第1項を変形していくと、第2項、第3項の符号を逆にしたものになることが以下のように示される。

$$\begin{aligned} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}R_{\nu\rho}^{(\omega)} &= \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}R_{\nu\kappa\rho}^{(\omega)\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(R_{\nu\kappa\rho}^{(\omega)\kappa} + R_{\kappa\rho\nu}^{(\omega)\kappa} + R_{\rho\nu\kappa}^{(\omega)\kappa}) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\epsilon_{\nu\kappa\rho\sigma}\epsilon^{\sigma\phi\chi\psi}R_{\phi\chi\psi}^{(\omega)\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{\kappa\sigma}^{\lambda\mu}\epsilon^{\sigma\phi\chi\psi}R_{\phi\chi\psi}^{(\omega)\kappa} \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\phi\chi\psi}R_{\phi\chi\psi}^{(\omega)\lambda} - \epsilon^{\lambda\phi\chi\psi}R_{\phi\chi\psi}^{(\omega)\mu}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

これで、(2.1) が局所的な超対称変換 (2.3) の下で不変であることが示された。

重力とグラビティーノからなる単純超重力理論は局所的超対称性を破ることなく質量パラメータを導入して変形することができる。[22] 以下では 4 フェルミオン項は無視することにする。まずグラビティーノに次の質量項を導入しよう。

$$\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} = 4em_{3/2}^*(\psi_{L\mu}\gamma^{\mu\nu}\psi_{L\nu}) + \text{c.c.} \quad (2.32)$$

この質量項は通常のスピン 1/2 フェルミオンの場合同様カイラル対称性 $\psi_\mu \rightarrow e^{i\alpha}\psi_\mu$ を破る。グラビティーノに対するこのカイラル対称性は R-対称性にほかならない。質量項が R-対称性を破るということは、別の見方をすれば質量パラメータが R-電荷を持っていることを意味している。パラメータ $m_{3/2}$ は R-電荷 2 を持っているのみならずことができるが、これはちょうど超ポテンシャル W の持っている R-電荷に等しい。後で見るように、カイラル多重項を含む超重力理論においても超ポテンシャルの値がグラビティーノの質量を決定する。

ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\psi\text{mass}}$ が実際に質量 $m_{3/2}$ のグラビティーノを与えることを運動方程式を解くことによって確認しよう。背景時空は平坦であると仮定すると、運動方程式は

$$\gamma^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_{R\rho} + m_{3/2}^*\gamma^{\mu\nu}\psi_{L\nu} = 0. \quad (2.33)$$

この運動方程式を x^μ で微分すれば、添字の反対称性より第 1 項が消え、 $\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_\nu = 0$ を得る。(2.33) に左から γ_μ を掛けてこの関係式を用いれば $\gamma^\mu\psi_\mu = 0$ を得る。この二つの関係式を用いれば、(2.33) は次のように変形できる。

$$\gamma^\nu\partial_\nu\psi_{R\mu} + m_{3/2}^*\psi_{L\mu} = 0. \quad (2.34)$$

これはフェルミオンがベクトル添え字を持っていることを除けば質量 $m_{3/2}$ の粒子のディラック方程式に他ならない。

$\mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\psi\text{mass}}$ の超対称変換を考えてみよう。 $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ はもともと超対称変換のもとで不変であるが、 $\mathcal{L}_{\text{mass}}$ を加えたために、そのグラビティーノの超対称変換は次の新たな変分を与える。

$$\delta\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} = -\frac{8}{k}em_{3/2}^*(\psi_{L\mu}\gamma^{\mu\nu}D_\nu^{(\omega)}\xi_L) + \text{c.c.} \quad (2.35)$$

この変分は部分積分を行えば $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ から得られるグラビティーノの運動方程式に比例している。従ってグラビティーノの超対称変換に新たな変分を付け加えることで、 $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ の変分によって相殺できるはずである。実際

$$\delta'\psi_{R\mu} = -\frac{m_{3/2}^*}{2k}\gamma_\mu\xi_L \quad (2.36)$$

という項をグラビティーノの変換則に付け加えておけば $\delta'\mathcal{L}_{\text{grav}}$ は (2.35) のちょうど逆符号の変分を与える。この変換則の変更はさらに次の新たな変分を与える。

$$\delta'\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} = \frac{12e|m_{3/2}|^2}{k}(\psi_{L\mu}\gamma^\mu\xi_R) + \text{c.c.} = 6e\frac{|m_{3/2}|^2}{k^2}e_\mu^m\delta e_\mu^m \quad (2.37)$$

これはちょうど多脚場の変分のトレースに比例しているから、次の宇宙項を導入すればその超対称変換によって相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{\text{cc}} = 6e\frac{|m_{3/2}|^2}{k^2}. \quad (2.38)$$

すなわち、グラビティーノの質量が $m_{3/2}$ である単純超重力理論は負の宇宙定数 $\Lambda = -6|m_{3/2}|^2/k^2$ を持つ。こうしてすべての変分が相殺することが確かめられた。結局次のラグランジアン及び変換則が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{k^2} (eR + 6e|m_{3/2}|^2) - 4e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega)} \psi_\rho) \\ & - 4em_{3/2}^* (\psi_{L\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{L\nu}) - 4em_{3/2} (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\delta\psi_{L\mu} = \frac{1}{k} \left(D_\mu^{(\omega)} \xi_L + \frac{m_{3/2}}{2} \gamma_\mu \xi_R \right), \quad \delta e_\mu^\nu = 2k(\psi_m \gamma^\mu \xi) \quad (2.40)$$

グラビティーノの変換則が変化しているということは、後で解説する補助場を含めた off-shell 形式の立場では、質量変形の結果重力多重項中の補助場が期待値を持つことを意味している。

カイラル多重項 一般のケーラーポテンシャル K で与えられるカイラル多重項の運動項 (1.65) をネーター処方によって重力に結合することを考えよう。(1.65) を一般座標変換に対して共変化した次のラグランジアンから出発する。

$$\mathcal{L}_\phi = -eK_{i\bar{j}} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}}, \quad (2.41)$$

$$\mathcal{L}_\chi = -\frac{e}{4} K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(M,\omega)} \chi_R^{\bar{j}}) + \frac{e}{4} K_{i\bar{j}} (D_\mu^{(M,\omega)} \chi_L^i \gamma^\mu \chi_R^{\bar{j}}). \quad (2.42)$$

変換則についても、一般座標変換のもとで共変な形に直した次のものを採用する。

$$\delta\phi^i = \xi_L \chi_L^i, \quad \delta\chi_L^i = 2\gamma^\mu \xi_R \partial_\mu \phi^i, \quad (2.43)$$

ここでは超ポテンシャル $W(\Phi)$ が 0 の場合のみを考える。

ネーター処方の第一段階として上記のラグランジアンを変換したときに現れる変分を求めよう。この変換則は大域的超対称性の場合には作用を不変にするから $D_\mu^{(\omega)} \xi$ に比例するはずである。これはちょうど (1.255) に与えた超対称カレント (補助場を $F_{\text{cov}}^i = 0$ とし、保存則に寄与しない全微分項を除いたもの)

$$j_{QL}^\mu = -K_{m\bar{n}} \gamma^\lambda \gamma^\mu \chi_L^m \partial_\lambda \phi^{*\bar{n}} \quad (2.44)$$

を用いて

$$\delta_\phi \mathcal{L}_\phi + \delta_\chi \mathcal{L}_\chi = e(D_\mu^{(\omega)} \xi) j_Q^\mu \quad (2.45)$$

と書くことができる。(2.45) は通常のゲージ理論の場合と同様に次のネーター項の導入で相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{J\text{chiral}} = -e j_Q^\mu \psi_\mu = keK_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu \gamma^\lambda \psi_{\mu L}) (\partial_\lambda \bar{\phi}^{\bar{j}}) + \text{c.c.} \quad (2.46)$$

このネーター項の ψ_μ の変分はちょうど上記の変分を相殺するが、 χ を変分すると新たな項が得られる。

$$\begin{aligned} \delta_\chi \mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= -2ke(\xi_R \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma^\lambda \psi_{\mu L}) K_{i\bar{j}} (\partial_\kappa \phi^i) (\partial_\lambda \bar{\phi}^{\bar{j}}) + \text{c.c.} \\ &= eT_\nu^m \delta e_\mu^\nu + ikeS_{\lambda\nu} (\xi \gamma_5 \gamma^{\lambda\mu\nu} \psi_\mu). \end{aligned} \quad (2.47)$$

ただし $T_{\mu\nu}$ と $S_{\mu\nu}$ はそれぞれスカラー場のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = K_{i\bar{j}}[(\partial_\mu\phi^i)(\partial_\nu\bar{\phi}^{\bar{j}}) + (\partial_\nu\phi^i)(\partial_\mu\bar{\phi}^{\bar{j}}) - g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\phi^i)(\partial^\lambda\bar{\phi}^{\bar{j}})] \quad (2.48)$$

および次のように定義される反対称テンソルである。

$$S_{\mu\nu} = -iK_{i\bar{j}}[(\partial_\mu\phi^i)(\partial_\nu\bar{\phi}^{\bar{j}}) - (\partial_\nu\phi^i)(\partial_\mu\bar{\phi}^{\bar{j}})] \quad (2.49)$$

変分 (2.47) の第 1 項はエネルギー運動量テンソルを含み、ちょうどスカラー場の運動項 \mathcal{L}_ϕ に含まれる多脚場の変分と相殺する。ここまでの結果を全てまとめると、

$$\begin{aligned} & (\delta_\phi\mathcal{L}_\phi + \delta_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta_\psi\mathcal{L}_{J\text{chiral}}) + (\delta_e\mathcal{L}_\phi + \delta_\chi\mathcal{L}_{J\text{chiral}}) \\ &= ikeS_{\lambda\nu}(\xi\gamma_5\gamma^{\lambda\mu\nu}\psi_\mu). \end{aligned} \quad (2.50)$$

中間の式の一つ目の括弧は $\mathcal{O}(k^0)$ の項であり、相殺している。二つ目の括弧は $\mathcal{O}(k^1)$ の項であり、この部分がまだ相殺されないで残っている。(2.50) を見ると、重力部分の計算で現れた (2.20) とよく似ていることに気づく。並べて書いてみよう。

$$\delta\mathcal{L}_{(\phi,\chi)} = -ikeS_{\nu\rho}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_5\xi), \quad (2.51)$$

$$\delta\mathcal{L}_{\psi_\mu} = -\frac{4e}{k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}[D_\nu^{(\omega)}, D_\rho^{(\omega)}]\xi) \quad (2.52)$$

従って、もし、共変微分 $D_\mu^{(\omega)}$ に対して何らかの変更を行い、新たな共変微分 $D_\mu^{(\omega,S)}$ を定義することで

$$[D_\nu^{(\omega,S)}, D_\rho^{(\omega,S)}]\xi = \frac{1}{4}R_{\nu\rho mn}\gamma^{mn}\xi - \frac{ik^2}{4}S_{\nu\rho}\gamma_5\xi \quad (2.53)$$

のように交換関係から $S_{\mu\nu}$ が現れるようにすることができれば、(2.50) を相殺することができる。

反対称テンソル $S_{\mu\nu}$ を 2-形式として表わせば次のようにスカラー多様体上のケーラー形式の 4 次元時空への引き戻しであることがわかる。

$$S_2 \equiv \frac{1}{2}S_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = -iK_{i\bar{j}}d\phi^i \wedge d\bar{\phi}^{\bar{j}} \quad (2.54)$$

ケーラー形式 S_2 は閉形式である。すなわち

$$dS_2 = 0. \quad (2.55)$$

従って、スカラー多様体上で $S_2 = dS_1$ を満足する 1 形式 S_1 を (少なくとも局所的には) 定義することができる。

$$S_1 = \frac{i}{2}(K_i d\phi^i - K_{\bar{i}} d\bar{\phi}^{\bar{i}}) \quad (2.56)$$

これはケーラー接続とよばれる。ケーラー接続の時空への引き戻し $S_1 = S_\mu dx^\mu$ を用いて、グラビティーノの変換則とグラビティーノの運動項に含まれる微分を

$$\begin{aligned} D_\mu^{(\omega)}\psi_{L\nu} &\rightarrow D_\mu^{(\omega,S)}\psi_{L\nu} \equiv (D_\mu^{(\omega)} - \frac{ik^2}{4}S_\mu)\psi_{L\nu}, \\ D_\mu^{(\omega)}\xi_L &\rightarrow D_\mu^{(\omega,S)}\xi_L \equiv (D_\mu^{(\omega)} - \frac{ik^2}{4}S_\mu)\xi_L \end{aligned} \quad (2.57)$$

のように「共変化」しておけば、グラビティーノの運動項の変分 (2.20) に現れた共変微分の交換関係から、アインシュタイン作用の変分と相殺する曲率テンソルを含む項のほかに、ちょうど (2.53) にあるように (2.50) を相殺する項が現れる。

大域的な超対称性を持つ理論においては、ケーラーポテンシャルは二階微分 $K_{i\bar{j}}$ あるいはさらにそれを微分したものとしてのみ現れるので、(1.147) に与えたケーラー変換 $\delta K = -f - f^*$ のもとで不変であった。しかし、ケーラー接続はケーラーポテンシャルの一階微分であり、ケーラー変換のもとで次のように変化する。

$$\delta S_1 = d\left(\frac{f - f^*}{2i}\right) \quad (2.58)$$

これはケーラー接続がケーラー変換に対応した「ゲージ場」であることを表しており、 ξ_L および $\psi_{L\mu}$ の微分にそのゲージ場が加わるということは、これらの場はケーラー変換のもとで非自明に変換されるべきことを意味している。(2.57) の共変微分は ξ_L および $\psi_{L\mu}$ の次の変換則を意味している。

$$\delta\xi_L = \frac{ik^2}{4}\frac{f - f^*}{2i}\xi_L, \quad \delta\psi_{L\mu} = \frac{ik^2}{4}\frac{f - f^*}{2i}\psi_{L\mu} \quad (2.59)$$

スカラー場 ϕ^i はケーラー変換で不変であること、その超対称変換が $\xi_L\chi_L^i$ に比例することからカイラル多重項のフェルミオンもケーラー変換のもとで非自明に変換されるべきことがわかる。

$$\delta\chi_L^i = -\frac{ik^2}{4}\frac{f - f^*}{2i}\chi_L^i \quad (2.60)$$

従ってその共変微分は次のように定義すべきである。

$$D_\mu^{(\omega,M,S)}\chi_L^i = D_\mu^{(\omega,M)}\chi_L^i + \frac{ik^2}{4}S_\mu\chi_L^i. \quad (2.61)$$

実は、フェルミオンの2次の項までにおいては、カイラル多重項を含む超重力理論を構成するには、ネーター項の導入とケーラー変換についての共変化で十分である。(ただしポテンシャル項が無い場合。ポテンシャル項についてはあとで議論する。) すなわち、ラグランジアン、変換則は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{J\text{chiral}} \quad (2.62)$$

ただし、それぞれの項は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \frac{e}{k^2} R, \\
\mathcal{L}_\psi &= -4e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega,S)} \psi_\rho), \\
\mathcal{L}_\phi &= -eK_{i\bar{j}} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}}, \\
\mathcal{L}_\chi &= -\frac{1}{2} eK_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(M,\omega,S)} \chi_R^{\bar{j}}), \\
\mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= keK_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu \gamma^\lambda \psi_{\mu L}) (\partial_\lambda \bar{\phi}^{\bar{j}}) + \text{c.c.} \quad (2.63)
\end{aligned}$$

変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta\psi_\mu &= \frac{1}{k} D_\mu^{(\omega,S)} \xi, \\
\delta e_\mu^m &= 2k(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\
\delta\phi^i &= \xi_L \chi_L^i, \\
\delta\chi_L^i &= 2\gamma^\mu \xi_R \partial_\mu \phi^i, \quad (2.64)
\end{aligned}$$

上記のラグランジアン of 局所的超対称変換のもとでの変分の相殺は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{L}_\phi + \delta_\chi \mathcal{L}_\chi + \delta_\psi \mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= 0, \\
\delta_\chi \mathcal{L}_{J\text{chiral}} + \delta_e \mathcal{L}_\phi + (\delta_e \mathcal{L}_e + \delta_\psi \mathcal{L}_\psi) &= 0. \quad (2.65)
\end{aligned}$$

二行目の括弧は、そのまとまりで計算するとある程度まとまって簡単な形になることを意味している。

フェルミオンがケーラー変換のもとで非自明に変換されるということは、それらがケーラー多様体上のケーラー束と呼ばれるベクトル束の断面として現されることを意味している。このファイバー束がスカラー多様体上で定義されるには次の量子化条件が満足される必要がある。[23]

$$2\pi\mathbf{Z} \ni \frac{k^2}{4} \oint S_2 \quad (2.66)$$

積分はスカラー多様体上の任意の 2 サイクル上で行われる。ケーラー形式がこのような量子化条件を満足する多様体は Hodge 多様体と呼ばれる。

2.2 ポテンシャル項

前の節で、超重力理論においてはケーラー変換がフェルミオンの位相変換を引き起こすことを見た。それぞれのフェルミオンのチャージは R-m チャージに比例してい

る。(ただし、カイラル多重項についてはスカラー場の R-チャージが 0 になるように定義する。) 超ポテンシャル W は R 電荷 2 を持つので、スカラー多様体上のケーラー変換のもとで $W \rightarrow W' = e^{k^2(f-f^*)/4}W$ と変換されそうであるが、 W は正則関数でなければならないから、このような変換は許されない。この問題を解決するには、 W に $e^{k^2 K/4}$ を掛けた \mathcal{W} を定義すればよい。

$$\mathcal{W} = e^{k^2 K/4}W. \quad (2.67)$$

\mathcal{W} はケーラー変換の下で次のように変換される。

$$\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}' = e^{k^2(f-f^*)/4}\mathcal{W}. \quad (2.68)$$

対応する共変微分は

$$\begin{aligned} D_i^{(S)}\mathcal{W} &= \partial_i\mathcal{W} - \frac{ik^2}{2}S_i\mathcal{W} = \partial_i\mathcal{W} + \frac{k^2}{4}K_i\mathcal{W}, \\ D_{\bar{i}}^{(S)}\mathcal{W} &= \partial_{\bar{i}}\mathcal{W} - \frac{ik^2}{2}S_{\bar{i}}\mathcal{W} = \partial_{\bar{i}}\mathcal{W} - \frac{k^2}{4}K_{\bar{i}}\mathcal{W} = 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

二つ目が 0 になることは \mathcal{W} の定義式と W が正則関数であることを用いればわかる。

\mathcal{W} の変換性から逆に W の変換性を読み取ると

$$W \rightarrow W' = e^{(k^2/2)f}W. \quad (2.70)$$

となる。この変換は W の正則性を保つ。この変換則のもとでの共変性を要請すると共変微分が次のように定義できる。

$$\begin{aligned} D_i^{(S)}W &= \partial_iW + \frac{k^2}{2}K_iW, \\ D_{\bar{i}}^{(S)}W &= \partial_{\bar{i}}W = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

一般に、ケーラー変換のもとで

$$X \rightarrow X' = e^{af+bf^*}X \quad (2.72)$$

のように変換される量があったとき、その共変微分は

$$\begin{aligned} D_i^{(S)}X &= \partial_iX + aK_iX, \\ D_{\bar{i}}^{(S)}X &= \partial_{\bar{i}}X + bK_{\bar{i}}X, \end{aligned} \quad (2.73)$$

と与えられる。この定義を用いれば、次の式を示すことができる。(c は任意の定数である。)

$$D_i^{(S)}e^{cK} = D_{\bar{i}}^{(S)}e^{cK} = 0. \quad (2.74)$$

すなわち、 e^{cK} のような因子は自由に共変微分を通り抜けることができる。

超ポテンシャル W は正則関数であるから、ケーラー変換 (2.70) を用いれば 0 でない限り任意の関数形に取ることができる。ケーラー変換で不変であるケーラーポテンシャルと超ポテンシャルの組み合わせは

$$|\mathcal{W}|^2 = e^{k^2 K/2} |W|^2 =: e^{k^2 G/2} \quad (2.75)$$

である。この式で定義される関数 G が同じである二つの理論は、超ポテンシャル W やケーラーポテンシャル K が異なっても、変数変換によって互いに移りあうことができる。

2.3 ゲージ多重項も含むラグランジアン

前節で与えた、カイラル多重項を含む超重力理論に、さらにゲージ多重項を導入しよう。以前にも述べたように、ゲージ変換は必ずしもケーラーポテンシャルを不変に保つ必要は無く、ケーラー変換の分だけなら変化させても良い。パラメータを ϵ^a とするゲージ変換を $\delta_{\text{gauge}} \phi^i = \epsilon^a t_a^i$ とし、このゲージ変換によってケーラーポテンシャルが次のように変化するとする。

$$\delta_{\text{gauge}} K = \epsilon^a (t_a^i K_i + t_a^{\bar{i}} K_{\bar{i}}) = -\epsilon^a (f_a + f_a^*) \quad (2.76)$$

f_a はスカラー場 ϕ^i の正則関数である。

前節で、フェルミオンや超ポテンシャルを適切に変換すれば、超重力理論においても作用がケーラー変換のもとでの不変性を持つことを見た。従って、ゲージ変換 (2.76) のもとでフェルミオンや超ポテンシャルが次のように変換されれば作用はゲージ不変になる。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gauge}} \xi_L &= \frac{ik^2}{4} \epsilon^a \frac{f_a - f_a^*}{2i} \xi_L, \\ \delta_{\text{gauge}} \psi_{L\mu} &= \frac{ik^2}{4} \epsilon^a \frac{f_a - f_a^*}{2i} \psi_{L\mu}, \\ \delta_{\text{gauge}} \chi_L^i &= -\frac{ik^2}{4} \epsilon^a \frac{f_a - f_a^*}{2i} \chi_L^i, \\ \delta_{\text{gauge}} \lambda_L^a &= \frac{ik^2}{4} \epsilon^a \frac{f_a - f_a^*}{2i} \lambda_L^a, \\ \delta_{\text{gauge}} W &= \frac{k^2}{2} \epsilon^a f_a W \end{aligned} \quad (2.77)$$

最後の式は、スカラー場に対してゲージ変換を行ったときにその関数である超ポテンシャル W がこの式によって変換されなければならないことを意味しており、

$$t_a^i \partial_i W = \frac{k^2}{2} f_a W \quad (2.78)$$

という関係式が成り立つことを表している。この両辺に $(k^2/2)t_a^i K_i W$ を加えて次のように書くこともできる。

$$t_a^i D_i^{(S)} W = \frac{ik^2}{2} W \mu_a \quad (2.79)$$

ゲージ変換がケーラー変換を引き起こすと、変換パラメータ ξ やグラビティーノ ψ_μ 、フェルミオン χ_L^i も対応する変換 (2.77) を受ける。このため、それらの共変微分を定義する際にもこの寄与を考慮する必要がある。例えば変換パラメータ ξ の共変微分は次のように定義される、

$$D_\mu^{(\omega, S, G)} \xi_L = D_\mu^{(\omega)} \xi_L - \frac{ik^2}{4} S_\mu^{(G)} \xi_L \quad (2.80)$$

ただし、 $S_\mu^{(G)}$ はゲージ変換の寄与まで含めた複合ゲージ場であり、次のように定義される。

$$S_\mu^{(G)} = S_\mu^0 - \frac{i}{2} (f_a - f_a^*) A_\mu^a \quad (2.81)$$

S_μ^0 は以前に定義した複合ゲージ場中のスカラー場の微分をゲージ共変微分に置き換えたものである。

$$S_\mu^0 = \frac{i}{2} (K_i D_\mu^{(G)} \phi^i - K_{\bar{i}} D_\mu^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{i}}) \quad (2.82)$$

$S_\mu^{(G)}$ 中のゲージ場の係数は次のようにモーメントマップの形にまとめることができる。

$$S_\mu^{(G)} = \frac{i}{2} (K_i \partial_\mu \phi^i - K_{\bar{i}} \partial_\mu \bar{\phi}^{\bar{i}}) + \mu_a A_\mu^a \quad (2.83)$$

(これは、ゲージ不変な作用 (1.170) に現れる超場 $K + \Gamma$ のベクトル成分に (フェルミオンを含む項を除き) 比例する。) この表式を以下で実際に用いることはないが、実際にラグランジアンが超対称変換のもとで不変であることをチェックする際には有用である。

ゲージ多重項、カイラル多重項を含むもっとも一般的な超重力理論のラグランジアンをフェルミオンの二次までのオーダーで決定しよう。まず、重力部分を次のようにとる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sugra}} &= \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\psi, \\ \mathcal{L}_e &= \frac{e}{k^2} R, \\ \mathcal{L}_\psi &= -8e(\psi_{L\mu} \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega, S)} \psi_{R\rho}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

共変微分に含まれる S_μ は (2.81) で定義されるゲージ場を含むものである。重力多重項の変換則についても、ケーラー変換の共変化を行った次のものを採用しておく。

$$\begin{aligned} \delta e_\mu^m &= 2k(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\ \delta \psi_{\mu L} &= \frac{1}{k} D_\mu^{(\omega, S)} \xi_L \end{aligned} \quad (2.85)$$

以下で見ると、グラビティーノ変換則については新たな項を加える必要がある。物質場のラグランジアンとしては、大域的超対称理論のものを一般座標変換およびケーラー変換について共変化した次のものを採用する。

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \mathcal{L}_v + \mathcal{L}_\lambda + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\text{yukawa}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \mathcal{L}_{\text{pot}} + \mathcal{L}_{\chi\text{mass}} + \mathcal{L}_{\lambda\text{mass}} \quad (2.86)$$

ただしそれぞれの部分は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v &= -\frac{e}{4}(\text{Im } \tilde{\tau}_{ab})F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu b} - \frac{e}{8}(\text{Re } \tilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^\alpha F_{\rho\sigma}^b, \\ \mathcal{L}_\lambda &= \frac{e}{2}(\text{Im } \tilde{\tau}_{ab}) \left[-(\lambda_L^\alpha \gamma^\mu D_\mu^{(G,\omega,S)} \lambda_R^b) + (D_\mu^{(G,\omega,S)} \lambda_L^\alpha \gamma^\mu \lambda_R^b) \right] \\ &\quad + \frac{ie}{2}(\text{Re } \tilde{\tau}_{ab})D_\mu^{(G)}(\lambda_L^\alpha \gamma^\mu \lambda_R^b), \\ \mathcal{L}_3 &= \frac{ie}{4}\tilde{\tau}_{ab,i}(\lambda_L^\alpha \chi_L^b \chi_L^i) + \text{c.c.} \\ \mathcal{L}_\phi &= -eK_{i\bar{j}}D_\mu^{(G)}\phi^i D^{(G)\mu}\bar{\phi}^{\bar{j}}, \\ \mathcal{L}_\chi &= -\frac{1}{2}eK_{i\bar{j}}(\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(G,M,\omega,S)} \chi_R^{\bar{j}}), \\ \mathcal{L}_{\text{yukawa}} &= e t_{ai}(\lambda_L^\alpha \chi_L^i) + e(\chi_R^{\bar{i}} \lambda_R^\alpha) t_{a\bar{i}}. \\ \mathcal{L}_D &= -\frac{e}{2}(\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_a \mu_b, \\ \mathcal{L}_{D\lambda\chi} &= \frac{e}{4}(\tilde{\tau}_{ab,i})(\chi_L^i \lambda_L^b)(\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ac} \mu_c + \text{c.c.} \\ \mathcal{L}_{\text{pot}} &= -e(D_i^{(S)} \mathcal{W}) K^{i\bar{j}} (D_{\bar{j}}^{(S)} \bar{\mathcal{W}}), \\ \mathcal{L}_{\chi\text{mass}} &= \frac{e}{4}(D_i^{(M,S)} D_j^{(S)} \mathcal{W})(\chi_L^i \chi_L^j) + \text{c.c.}, \\ \mathcal{L}_{\lambda\text{mass}} &= \frac{ie}{4} K^{i\bar{j}} \tilde{\tau}_{ab,i} (\lambda_L^\alpha \lambda_L^b) D_{\bar{j}}^{(S)} \bar{\mathcal{W}} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.87)$$

t_a^i はゲージ変換を表すスカラー多様体上のキリングベクトルであり、 μ_a は (1.154) に与えられたモーメントマップである。物質場の変換則は次のようにとる。

$$\begin{aligned} \delta v_\mu^\alpha &= \xi \gamma_\mu \lambda^\alpha, \\ \delta \lambda_L^\alpha &= -\mathbb{K}_2^\alpha \xi_L + i(\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_b \xi_L, \\ \delta \phi^i &= \xi_L \chi_L^i, \\ \delta \chi_L^i &= 2\gamma^\mu \xi_R D_\mu^{(G)} \phi^i + 2\xi_L K^{i\bar{j}} D_{\bar{j}}^{(S)} \bar{\mathcal{W}}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

まず、上で与えたラグランジアンと変換則を用いて変分計算を行い、カレントを決定しよう。まずは多脚場は変換せずに、物質場の変換のみを計算すると次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{matter}} \mathcal{L}_{\text{matter}} &= -\frac{k^2 e}{2} K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\lambda \xi_R) \mathcal{W} (D_\lambda^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{j}}) - 2k^2 e \bar{\mathcal{W}} D_i^{(S)} \mathcal{W} (\xi_L \chi_L^i) + \text{c.c.} \\ &\quad + (D\xi \text{ terms}) \end{aligned} \quad (2.89)$$

パラメータの微分 $D\xi$ を含む項からカレントを読み取ることができる。 $D\xi$ に比例しない項が現れるのは、ケーラー変換に対する共変化を行うためにラグランジアンを変更したためである。

$D\xi$ を含む項を相殺するために、次のネーター結合項を導入すればよい。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_J &= \mathcal{L}_{J\text{vector}} + \mathcal{L}_{J\text{chiral}} + \mathcal{L}_{JW} + \mathcal{L}_{JD} \\
\mathcal{L}_{J\text{vector}} &= -ke(\text{Im } \tilde{\tau}_{ab})(\lambda^a \gamma^\mu \mathbb{F}_2^b \psi_\mu), \\
\mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= keK_{i\bar{j}}(\chi_L^i \gamma^\mu \gamma^\lambda \psi_{L\mu})(D_\lambda^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{j}}) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{JW} &= ke(D_i^{(S)} \mathcal{W})(\chi_L^i \gamma^\mu \psi_{R\mu}) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{JD} &= -ike(\psi_{L\mu} \gamma^\mu \lambda_R^a) \mu_a + \text{c.c.}, \tag{2.90}
\end{aligned}$$

これらがそれぞれ (2.87) のどの項の変分から現れた $D\xi$ 項を相殺するのは、あとでまとめて与える。

(2.89) の第 1 項は ψ_μ の変換則に新たな項 $\delta'_\psi \psi_{\mu L} = -(k/4)\mathcal{W}\gamma_\mu \xi_R$ を付け加えることで、 $\delta'_\psi \mathcal{L}_{J\text{chiral}}$ によって相殺することができる。さらに $\delta'_\psi \mathcal{L}_{JW}$ は (2.89) の右辺第 2 項に良く似た項を与える。しかしそれは (2.89) の右辺第 2 項の丁度 $1/2$ 倍であり、次のものが残る。

$$-3k^2 e \bar{\mathcal{W}} D_i^{(s)} \mathcal{W} (\xi_L \chi_L^i) + \text{c.c.} \tag{2.91}$$

これは $\delta\phi^i$ に比例している。従って、次の宇宙項の導入によって相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{\text{cc}} = \frac{3k^2 e}{2} |\mathcal{W}|^2 \tag{2.92}$$

ここまで得られたものを全て合計し、変分も全て計算すればまだ次のものが残されることがわかる。

$$4ke\mathcal{W}(\psi_{\mu R} \gamma^{\mu\nu} D_\nu^{(S,\omega)} \xi_R) - 3k^3 e |\mathcal{W}|^2 (\psi_{\mu R} \gamma^\mu \xi_L) + \text{c.c.} \tag{2.93}$$

この項は、グラビティーノ質量項

$$\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} = -2k^2 e \mathcal{W} (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) + \text{c.c.}, \tag{2.94}$$

の導入によって相殺することができる。

最後に導入した二つの項 \mathcal{L}_{cc} と $\mathcal{L}_{\psi\text{mass}}$ は、§2.1 においてグラビティーノ質量を導入したときに現れた項と同じ形をしている。実際、§2.1 において得られた項に

$$m_{3/2} = \frac{k^2}{2} \mathcal{W} \tag{2.95}$$

を代入すればここで得られた二つの項が得られる。

ここでは上で与えたラグランジアンが実際に局所的超対称変換のもとで不変であることは確認しないが、どのような相殺が起こるのかだけ与えておこう。フェルミオンの変換則を次のように補助場由来の部分とそれ以外の部分に分けておく。

$$\begin{aligned}
\delta\psi_{\mu L} &= \delta_{\psi}^0\psi_{\mu L} + \delta'_{\psi}\psi_{\mu L} \\
\delta_{\psi}^0\psi_{\mu L} &= \frac{1}{k}D_{\mu}^{(\omega,S)}\xi_L, \\
\delta'_{\psi}\psi_{\mu L} &= -\frac{k}{4}\mathcal{W}\gamma_{\mu}\xi_R, \\
\delta\lambda_L^a &= \delta_{\lambda}^0\lambda_L^a + \delta'_{\lambda}\lambda_L^a \\
\delta_{\lambda}^0\lambda_L^a &= -K_2^a\xi_L, \\
\delta'_{\lambda}\lambda_L^a &= i(\text{Im}\tilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_b\xi_L, \\
\delta\chi_L^i &= \delta_{\chi}^0\chi_L^i + \delta'_{\chi}\chi_L^i, \\
\delta_{\chi}^0\chi_L^i &= 2\gamma^{\mu}\xi_R D_{\mu}^{(G)}\phi^i, \\
\delta'_{\chi}\chi_L^i &= 2\xi_L K^{i\bar{j}}D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

これらの記号を用いて、変分計算における相殺の様子を表すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda^0 \mathcal{L}_\lambda + \delta_v \mathcal{L}_v + \delta_\chi^0 \mathcal{L}_3 + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_{J\text{vector}} &= 0, \\
\delta_\lambda^0 \mathcal{L}_3 + \delta_\phi \mathcal{L}_v &= 0, \\
\delta_\lambda^0 \mathcal{L}_{J\text{vector}} + \delta_e \mathcal{L}_v &= 0, \\
\delta'_\chi \mathcal{L}_3 + \delta_\lambda^0 \mathcal{L}_{\lambda\text{mass}} &= 0, \\
\delta_\phi \mathcal{L}_\phi + \delta_\chi^0 \mathcal{L}_\chi + \delta_\lambda^0 \mathcal{L}_{\text{yukawa}} + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= 0, \\
\delta_v \mathcal{L}_\phi + \delta_\chi^0 \mathcal{L}_{\text{yukawa}} + \delta'_\lambda \mathcal{L}_\lambda + \delta_\chi^0 \mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_{JD} &= 0, \\
\delta'_\lambda \mathcal{L}_3 + \delta_\lambda^0 \mathcal{L}_{D\lambda\chi} &= 0, \\
\delta_\phi \mathcal{L}_D + \delta'_\lambda \mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \delta'_\lambda \mathcal{L}_{\text{yukawa}} &= 0, \\
(\delta_\chi^0 \mathcal{L}_{J\text{chiral}} + \delta'_\lambda \mathcal{L}_{JD} + \delta_\lambda^0 \mathcal{L}_{JD} + \delta'_\lambda \mathcal{L}_{J\text{vector}}) \\
+ (\delta_e \mathcal{L}_\phi + \delta_e \mathcal{L}_D) + (\delta_e \mathcal{L}_e + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_\psi) &= 0, \\
\delta'_\chi \mathcal{L}_\chi + \delta_\chi^0 \mathcal{L}_{\chi\text{mass}} + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_{JW} + \delta'_\psi \mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= 0, \\
\delta'_\chi \mathcal{L}_{\chi\text{mass}} + \delta_\phi \mathcal{L}_{\text{pot}} + \delta'_\psi \mathcal{L}_{JW} + \delta_\phi \mathcal{L}_{\text{cc}} &= 0, \\
\delta_\chi^0 \mathcal{L}_{JW} + \delta'_\chi \mathcal{L}_{J\text{chiral}} + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_{\psi\text{mass}} + \delta'_\psi \mathcal{L}_\psi &= 0, \\
\delta'_\chi \mathcal{L}_{JW} + \delta_e \mathcal{L}_{\text{pot}} &= 0, \\
\delta'_\psi \mathcal{L}_{\psi\text{mass}} + \delta_e \mathcal{L}_{\text{cc}} &= 0, \\
\delta'_\chi \mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \delta'_\lambda \mathcal{L}_{\lambda\text{mass}} &= 0, \\
\delta'_\chi \mathcal{L}_{\text{yukawa}} + \delta'_\psi \mathcal{L}_{JD} &= 0, \\
\delta'_\psi \mathcal{L}_{J\text{vector}} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

最後にケーラー変換を用いて W を定数にした作用を与えておこう。実際に行うことは、 W を定数としてその微分を含む項を削除するだけである。その結果、次のラグランジアンが得られる。まず、フェルミオンを含まない項は次のものである。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{cc}} &= \frac{3k^2 e}{2} |W|^2 e^{\frac{k^2}{2} K} \\
\mathcal{L}_{\text{pot}} &= -\frac{k^4 e}{4} |W|^2 e^{\frac{k^2}{2} K} K_i K^{i\bar{j}} K_{\bar{j}} \\
\mathcal{L}_D &= -\frac{e}{2} (\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_a \mu_b, \\
\mathcal{L}_e &= \frac{e}{k^2} R, \\
\mathcal{L}_\phi &= -e K_{i\bar{j}} D_\mu^{(G)} \phi^i D^{(G)\mu} \bar{\phi}^{\bar{j}}, \\
\mathcal{L}_v &= -\frac{e}{4} (\text{Im } \tilde{\tau}_{ab}) F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} - \frac{e}{8} (\text{Re } \tilde{\tau}_{ab}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b,
\end{aligned} \tag{2.98}$$

次に、フェルミオンと微分を含む項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda &= -\frac{e}{2}(\text{Im } \tilde{\tau}_{ab})(\lambda^a \gamma^\mu D_\mu^{(G,\omega)} \lambda^b) \\
&\quad + \frac{k^2 e}{8}(\text{Im } \tilde{\tau}_{ab})(K_i D_\mu^{(G)} \phi^i - K_{\bar{i}} D_\mu^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{i}})(\lambda_L^a \gamma^\mu \lambda_R^b) \\
&\quad + \frac{ie}{4}(\text{Re } \tilde{\tau}_{ab}) D_\mu^{(G)}(\lambda^a \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^b), \\
\mathcal{L}_{J\text{vector}} &= -ke(\text{Im } \tilde{\tau}_{ab})(\lambda^a \gamma^\mu K_{\frac{1}{2}}^b \psi_\mu), \\
\mathcal{L}_3 &= \frac{ie}{4} \tilde{\tau}_{ab,i} (\lambda_L^a K_{\frac{1}{2}}^b \chi_L^i) + \text{c.c.} \\
\mathcal{L}_\psi &= -8e(\psi_{L\mu} \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega)} \psi_{R\rho}) + k^2 e (K_i D_\nu^{(G)} \phi^i - K_{\bar{i}} D_\nu^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{i}})(\psi_{L\mu} \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_{R\rho}) \\
\mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= ke K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu \gamma^\lambda \psi_{L\mu})(D_\lambda^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{j}}) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_\chi &= -\frac{1}{4} e K_{i\bar{j}} (\chi_L^i \gamma^\mu D_\mu^{(G,\omega)} \chi_R^{\bar{j}}) \\
&\quad + \frac{1}{4} e (\chi_L^i \gamma^\mu \chi_R^{\bar{j}}) \left(K_{im\bar{j}} - \frac{k^2}{4} K_i K_{m\bar{j}} \right) D_\mu^{(G)} \phi^m + \text{c.c.} \tag{2.99}
\end{aligned}$$

フェルミオンを含み微分を含まない項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} &= -2k^2 e W e^{\frac{k^2}{4} K} (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{\lambda\text{mass}} &= \frac{ik^2 e}{8} \overline{W} e^{\frac{k^2}{4} K} K^{i\bar{j}} \tilde{\tau}_{ab,i} K_{\bar{j}} (\lambda_L^a \lambda_L^b) + \text{c.c.} \\
\mathcal{L}_{\chi\text{mass}} &= \frac{k^2 e}{8} W e^{\frac{k^2}{4} K} \left(K_{ij} - K_{ij\bar{k}} K^{\bar{k}l} K_l + \frac{k^2}{2} K_i K_j \right) (\chi_L^i \chi_L^j) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{JD} &= -ike(\psi_{L\mu} \gamma^\mu \lambda_R^a) \mu_a + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{JW} &= \frac{k^3 e}{2} W e^{\frac{k^2}{4} K} K_i (\chi_L^i \gamma^\mu \psi_{R\mu}) + \text{c.c.}, \\
\mathcal{L}_{D\lambda\chi} &= \frac{e}{4} (\tilde{\tau}_{ab,i}) (\chi_L^i \lambda_L^b) (\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ac} \mu_c + \text{c.c.} \\
\mathcal{L}_{\text{yukawa}} &= e K_{\bar{i}j} (\chi_R^{\bar{i}} \lambda_R^a) t_a^j + \text{c.c.} \tag{2.100}
\end{aligned}$$

超対称変換は

$$\begin{aligned}
\delta \epsilon_\mu^m &= 2k(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\
\delta \psi_{\mu L} &= \frac{1}{k} D_\mu^{(\omega)} \xi_L + \frac{k}{8} (K_i D_\mu^{(G)} \phi^i - K_{\bar{i}} D_\mu^{(G)} \bar{\phi}^{\bar{i}}) \xi_L - \frac{k}{4} e^{\frac{k^2}{4} K} W \gamma_\mu \xi_R, \\
\delta v_\mu^a &= \xi \gamma_\mu \lambda^a, \\
\delta \lambda_L^a &= -K_{\frac{1}{2}}^a \xi_L + i \xi_L (\text{Im } \tilde{\tau}^{-1})^{ab} \mu_b, \\
\delta \phi^i &= \xi_L \chi_L^i, \\
\delta \chi_L^i &= 2\gamma^\mu \xi_R D_\mu^{(G)} \phi^i + k^2 e^{\frac{k^2}{4} K} \overline{W} \xi_L K^{i\bar{j}} K_{\bar{j}}. \tag{2.101}
\end{aligned}$$

これは [24] に与えられているラグランジアンフェルミオンの 2 次までのオーダーと一致する。¹

¹ただし次の置き換えを行う必要がある。 $k^2 \rightarrow 2$, $W \rightarrow -1$, $K \rightarrow -\mathcal{G}$, $\tilde{\tau}_{ab} \rightarrow if_{ab}$, $T_a \rightarrow -\tilde{g}T_a$, $k\psi_\mu \rightarrow \frac{1}{2}\psi_\mu$, $\chi_L^i \rightarrow 2\chi_L^i$.

第3章 超場形式

3.1 多脚場、捩率、曲率

§1.1 では、大域的超対称性を実現するためにボゾンの座標 x^m とフェルミオンの座標 θ^a で張られる超空間を導入した。超重力理論を超空間を用いて実現するためには、まずこの超空間を局所的な一般座標変換のもとでの共変性を持つように拡張しなければならない。

以下では超空間上の座標の添字を大文字のローマ字 K, L, M, \dots を使い、そのうちのボゾンの座標を表すのには小文字のギリシア文字 $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ を、フェルミオンの座標を表すのには小文字のギリシア文字 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ を用いる。一方超空間上の局所直交座標のボゾンの座標、フェルミオンの座標の両方を走る添字を A, B, C, \dots を使い、そのうちのボゾンの座標は k, l, m, \dots 、フェルミオンの座標は a, b, c, \dots を用いて表わすことにする。

$$z^M = (x^\mu, \theta^\alpha), \quad y^A = (y^m, \Theta^a). \quad (3.1)$$

局所直交系の座標のうち、ボゾンの座標は時空の次元に応じたローレンツ群 $SO(1,3)$ のベクトル表現に属し、フェルミオン座標はそのスピノル表現に属するものとする。スピノル添え字を奇数個持つ量はグラスマン数であるが、それらの交換から現れる負号をあらわすために、次の式にあるような記号を導入する。

$$X_M Y_N = (-)^{MN} Y_N X_M, \quad (3.2)$$

ここで $(-)$ の肩に乗っている添え字は、その添え字がベクトル添え字である場合には 0 を、スピノル添え字である場合には 1 をあらわすものとする。

超空間上の多脚場を導入する準備として、局所座標系での計量や添え字の上げ下げについて見ておこう。まず、局所直交系での添え字の上げ下げを行う行列を C_{AB} とし、添え字を上げる操作を次のように定義する。

$$X^A = C^{AB} X_B. \quad (3.3)$$

具体的には C_{AB} は次のように定義される。

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \eta_{mn} & \\ & C_{ab} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

C_{ab} は荷電共役行列である。行列 C^{AB} 全体は対称でも反対称でも無いので、添え字の順序には常に注意しておかなければならない。添え字の入れ替えに対して C^{AB} は次のように振舞う。

$$C^{AB} = (-)^{AB} C^{BA}. \quad (3.5)$$

(3.3) より、添え字を下げるためには C^{AB} の逆行列を用いて $X_A = (C^{-1})_{AB} X^B$ とすればよい。この規則を用いて C^{AB} 自身の二つの添え字を下げると、

$$C_{AB} \equiv (C^{-1})_{AC} (C^{-1})_{BD} C^{CD} = (C^{-1})_{BA}. \quad (3.6)$$

となる。この、下つき添え字の C_{AB} を用いれば、添え字を下げる規則は次のように表される。

$$X_A = X^B C_{BA} \quad (3.7)$$

(3.3) と (3.7) の規則は、添え字を上げ下げする場合には C を用い、常に左上と右下で縮約する、と覚えておけばよい。

超空間の接空間の座標と局所直交座標を結びつけるために多脚場 E_M^A を定義する。また、逆行列 E_A^M を次のように定義する。

$$E_M^A E_A^N = \delta_M^N, \quad E_A^N E_N^B = \delta_A^B. \quad (3.8)$$

超場の成分はグラスマン数であることもあるために掛ける順序には常に注意しなければならない。多脚場による添字の変換を行う場合にも常に次の式のように左上の添字と右下の添字を縮約することにする。

$$v_A = E_A^N v_N, \quad v^A = v^N E_N^A. \quad (3.9)$$

この規則は逆行列の定義 (3.8) においても満足されている。二つ以上の添字をもつテンソルの場合には、ベクトルのテンソル積と同じように扱われなければならない。たとえば T_{MN} と T_{AB} の間の関係は次のように与えられる。

$$T_{MN} = (-)^{(N+B)A} E_M^A E_N^B T_{AB}. \quad (3.10)$$

右辺にこのような符号が現れることは、 $T_{MN} = v_M w_N$ のような場合にベクトル v_M と w_N の添え字の変換則と矛盾しないために必要である。

超空間上のスピン接続は、共変微分中に次のように現れるものとして定義する。

$$D_M v_A = \partial_M v_A + \Omega_{M-A}^B v_B. \quad (3.11)$$

構造群、すなわち、局所座標系に作用する対称性の群は超群へは拡張せず、ローレンツ代数のままであるとする。これは必ずしもそうである必要は無く、より大きな代数を用いることもできるが、ここでは構造群として最小限必要なローレンツ群を取るこ

とにする。そしてボゾン成分とそれぞれのカイラリティのスピンル成分が混ざることなく変換されるものとする。このとき、スピン接続は次のようなブロック対角な形に制限される。

$$\Omega_{K-A}{}^B = \begin{pmatrix} \Omega_{K-m}{}^n & & \\ & \Omega_{K-\bar{a}}{}^{\bar{b}} & \\ & & \Omega_{K-\underline{a}}{}^{\underline{b}} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

さらに、ボゾン成分とフェルミオン成分は同じ生成子のベクトル表現とスピンル表現であり、次の関係式が成り立つ。

$$\Omega_a{}^m = \Omega_m{}^a = 0, \quad \Omega_a{}^b = \frac{1}{4}\Omega_{mn}(\gamma^{mn})_a{}^b. \quad (3.13)$$

この式はローレンツ条件と呼ばれる。スピンルの共変微分は次のように書くことができる。

$$D_\mu\psi_a = \partial_\mu\psi_a + \frac{1}{4}(\Omega_{\mu mn}\gamma^{mn})_a{}^b\psi_b = \partial_\mu\psi_a + \Omega_{\mu a}{}^b\psi_b \quad (3.14)$$

ローレンツ条件は、超空間上で座標系に依存することなく「カイラル方向」や「反カイラル方向」といった向きを定義することができることを保障している。このおかげで、たとえばカイラル多重項を定義する条件を座標系に依存しない式 $D_{\underline{a}}\Phi \equiv E_{\underline{a}}{}^M\partial_M\Phi = 0$ によって与えることができる。

超空間上での曲率は、共変微分の交換関係、あるいは反交換関係として次のように定義される。

$$R_{MN} = D_M D_N - (-)^{MN} D_N D_M \quad (3.15)$$

ローレンツ条件は曲率テンソルについても成立し、 $R_b{}^a = (1/4)R^{mn}(\gamma_{mn})_b{}^a$ という関係が成り立つ。一方、捩率は次のように定義される。

$$T_{MN}{}^A = D_M E_N{}^A - (-)^{MN} D_N E_M{}^A \quad (3.16)$$

これらは概微分形式を用いるとコンパクトに表すことができる。超空間上の微分形式のウェッジ積を次の性質を満足するものとして定義する。

$$dz^M \wedge dz^N = -(-)^{MN} dz^N \wedge dz^M. \quad (3.17)$$

多脚場やスピン接続、曲率、捩率の外微分形式は次のように定義される。

$$E^A = dz^M E_M{}^A, \quad (3.18)$$

$$\Omega = dz^M \Omega_M, \quad (3.19)$$

$$T^A = \frac{1}{2}(-)^{MN} dz^M \wedge dz^N T_{MN}{}^A, \quad (3.20)$$

$$R = \frac{1}{2}(-)^{MN} dz^M \wedge dz^N R_{MN}, \quad (3.21)$$

ただし、スピン接続と曲率は局所回転群の代数に値をとるものとして表した。これらを用いると、上記の捩率と曲率の定義は次のように書くことができる。

$$R = D \wedge D = d\Omega + \Omega \wedge \Omega, \quad (3.22)$$

$$T = DE. \quad (3.23)$$

多脚場の逆行列の共変微分は、次のように与えられる。

$$D_A E_B^N = -(-)^{A(B+M)} E_B^M (D_A E_M^C) E_C^N \quad (3.24)$$

この式と曲率、捩率の定義を用いると添え字を局所直交系のものに直した共変微分 $D_A \equiv E_A^M D_M$ に対して次の公式を示すことができる。

$$D_A D_B - (-)^{AB} D_B D_A = R_{AB} - T_{AB}^M D_M \quad (3.25)$$

この交換関係は超空間を用いた定式化においては非常にしばしば用いられる。

多脚場の二回微分は次のように二つの方法で変形することができる。

$$DDE^A = DT^A, \quad DDE^A = R \wedge E^A. \quad (3.26)$$

これらは当然等しいから、次の恒等式を得る。

$$I^1 \equiv DT - R \wedge E = 0. \quad (3.27)$$

連続する 3 つの共変微分も、次のように二通りに変形できる。

$$DDD = DR, \quad DDD = RD \quad (3.28)$$

これらはどちらも微分演算子の関係式であり一つ目の式の右辺の微分はその右側に来るもの全てに作用する。これら二つが恒等的に等しいということから、次の恒等式が成り立つ。

$$I^2 \equiv DR = 0. \quad (3.29)$$

ローレンツ代数の表列表示の添え字を明示すれば、次のようになる。

$$I^{1A} = DT^A - R^{AB} \wedge E_B = DT^A + E^B \wedge R_B^A, \quad (3.30)$$

$$I^{2AB} = DR^{AB}. \quad (3.31)$$

$I^1 = 0$ および $I^2 = 0$ はともにピアンキ項等式と呼ばれ、これを後に与える拘束条件とともに解くことによって物理的な自由度が決まる。

ピアンキ恒等式を多脚場を基底として次のように展開し、ローレンツ群の既約表現に分解する。

$$I^A = -\frac{1}{6} E^N E^M E^K I_{KMN}{}^A, \quad (3.32)$$

$$I_{pq} = -\frac{1}{6} E^N E^M E^K I_{KMNPq}. \quad (3.33)$$

成分は次のように与えられる。

$$I_{KMNpq} = (D_K R_{MN-pq} + T_{KM}{}^P R_{PN-pq})_{[KMN]}, \quad (3.34)$$

$$I_{KMN}{}^A = (D_K T_{MN}{}^A + T_{KM}{}^P T_{PN}{}^A + R_{KMN}{}^A)_{[KMN]}. \quad (3.35)$$

実は、ローレンツ条件を用いると、 $I^A = 0$ を解くことによって曲率テンソルの全ての成分を捺率で書くことができる。そして $I^A = 0$ が成り立てば自動的に $I_{mn} = 0$ も成り立つことを示すことができる。[25]

3.2 対称性

パラメータを $\Sigma_A{}^B$ とする局所ローレンツ変換を $\delta_M(\Sigma)$ と表すことにし、ベクトル V^A およびスピン接続に対する作用は次のように与えられる。

$$\delta_M(\Sigma)V^A = V^B \Sigma_B{}^A, \quad \delta_M(\Sigma)\Omega_{MA}{}^B = D_M \Sigma_A{}^B. \quad (3.36)$$

超空間上の一般座標変換

$$z^M \rightarrow z'^M = z'^M(z) \quad (3.37)$$

のもとでの場の変換則について考えよう。何も添え字を持たないスカラー場 $\Phi(x)$ の変換は次のように定義される。

$$\Phi(z) = \Phi'(z'). \quad (3.38)$$

内部対称性に対する添え字を持つ場合でも同様である。1 形式場 $V_M(z)$ の変換則は、

$$dz^M V_M(z) = dz'^M V'_M(z'). \quad (3.39)$$

によって与えられる。これに対して、局所直交系の添え字については、内部対称性と同様に扱う。複数の添え字を持つ場合にはこれらを組み合わせることで変換則が決定される。たとえば多脚場 $E_M{}^A$ とスピン接続 $\Omega_{M-A}{}^B$ については、次のように座標変換を定義することができる。

$$dz^M E_M{}^A(z) = dz'^M E'_M{}^A(z'), \quad (3.40)$$

$$dz^M \Omega_{MA}{}^B(z) = dz'^M \Omega_{M'A}{}^B(z') \quad (3.41)$$

特に、無限小変換

$$z'^M = z^M - \Xi^M. \quad (3.42)$$

についての変分を $\delta_{\text{gc}}^0(\Xi)$ とあらわすことにしよう。添え字の 0 は、局所ローレンツ系などの内部空間の添え字については何も作用しないことを意味している。いくつか

の例を与えよう。

$$\delta_{\text{gc}}^0(\Xi)\Phi = \Xi^K \partial_K \Phi, \quad (3.43)$$

$$\delta_{\text{gc}}^0(\Xi)V_M = \Xi^K \partial_K V_M + (\partial_M \Xi^K) V_K, \quad (3.44)$$

上記の変換と、局所ローレンツ変換を組み合わせることによって座標変換の下での変換則に共変性を持たせることができる。無限小一般座標変換に現れている微分を共変化するには、一般座標変換と、共変性を回復するための局所ローレンツ変換を同時に行うものを改めて一般座標変換だとみなし、 $\delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}$ と表す。

$$\delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}(\Xi) = \delta_{\text{gc}}^0(\Xi) + \delta_M(-\Xi^M \Omega_{M-mn}) \quad (3.45)$$

これを局所ローレンツ添え字を持つベクトルに作用させると、次のように共変微分になる。

$$\delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}(\Xi)V^A = \Xi^M D_M V^A \quad (3.46)$$

多脚場とスピン接続は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}(\Xi)E_M^A &= D_M \Xi^A + \Xi^N T_{NM}^A, \\ \delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}(\Xi)\Omega_{MA}^B &= \Xi^N R_{NMA}^B. \end{aligned} \quad (3.47)$$

局所ローレンツ変換のほかにも内部対称性があれば、それについても共変化を行うことができる。一般に A_M がゲージ場であり、そのゲージ変換が

$$\delta_{\text{gauge}}(\lambda)A_M = D_M^{(A)}\lambda = \partial_M \lambda + [A_M, \lambda] \quad (3.48)$$

であるとき、

$$\delta_{\text{gc}}^{(A)}(\Xi) = \delta_{\text{gc}}^0(\Xi) - \delta_{\text{gauge}}(\Xi^M A_M). \quad (3.49)$$

と定義すれば、ゲージ場の共変化された一般座標変換は

$$\delta_{\text{gc}}^{(A)}(\Xi)A_M = \Xi^K F_{KM} \quad (3.50)$$

ただし、超空間上での場の強さは次のように定義される。

$$F_{MN} = \partial_M A_N - (-)^{MN} \partial_N A_M + A_M A_N - (-)^{MN} A_N A_M \quad (3.51)$$

スピン接続に対する一般座標変換の式 (3.47) はこの特殊な場合とみなすことができる。

3.3 拘束条件

超重力理論においても、大域的な超対称性の場合と同じくカイラル多重項が定義できるということを要請すると、超空間の構造に対してある制限をかけることがで

きる。上で述べたように、ローレンツ条件は座標に依存しない形でカイラル条件の式 $D_{\underline{a}}\Phi = 0$ を与えることができる。もしこの条件が超空間全体で成り立てば、これをもう一度微分した $D_{\underline{a}}D_{\underline{b}}\Phi = 0$ も成立するはずである。従って、 Φ はスカラーであると仮定して微分の交換関係 (3.25) を用いると、

$$T_{\underline{ab}}{}^M D_M \Phi = 0. \quad (3.52)$$

が成り立たなければならない。これが Φ に対して新たな条件を与えてしまうと、大域的超対称理論と同様のカイラル多重項を定義することができなくなる。従って超空間の換率が次の条件を満足する必要がある。

$$T_{\underline{ab}}{}^m = T_{\underline{ab}}{}^{\bar{c}} = 0. \quad (3.53)$$

物理的に望ましい超重力理論を得るためには、これ以外にも拘束条件を課す必要がある。これは何かから導出されるようなものではなく、試行錯誤の結果として与えられるものである。以下では、成分形式での解析で得られた超対称変換の形から拘束条件を推測することにする。

超空間を用いると、実空間上の一般座標変換と超対称変換がともに超空間上の一般座標変換として表現される。より具体的にこの関係を表すために、実空間を $\theta^\alpha = 0$ によって定義される超空間の部分空間とみなすのが便利である。超空間上の座標変換のパラメータを Ξ^M としよう。ここで、 $\Xi^M|_{\theta=0} = (\epsilon^\mu, 0)$ を満足する超空間上の座標変換は、実空間をそのままに保ち、この変換を実空間上の座標変換とみなすことができる。一方、 $\Xi^M|_{\theta=0} = (0, \xi^\alpha)$ を満足する超空間上の一般座標変換は超対称変換とみなすことができる。

このような関係から、 x 空間上の多脚場 $e_\mu{}^m(x)$ 、グラビティーノ $\psi_\mu{}^a(x)$ およびスピン接続 $\omega_\mu{}^{mn}(x)$ は超空間上の多脚場 $E_M{}^A(z^M)$ およびスピン接続 $\Omega_M{}^A{}_B$ に次のように埋め込まれるとするのが自然である。

$$\begin{aligned} E_\mu{}^m|_{\theta=0} &= e_\mu{}^m, \\ E_\mu{}^a|_{\theta=0} &= \psi_\mu{}^a, \\ \Omega_{\mu-mn}|_{\theta=0} &= \omega_{\mu-mn}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

また、これら以外の成分の $\theta = 0$ 部分はゲージ自由度であり、超空間上の一般座標変換と局所ローレンツ変換によって次のように取ることができる。

$$\begin{aligned} E_\alpha{}^m|_{\theta=0} &= 0, \\ E_\alpha{}^b|_{\theta=0} &= \delta_\alpha^b, \\ \Omega_{\alpha-mn}|_{\theta=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

実際にゲージ変換を用いてこのように取れることはあとで見る。 E_M^A の逆行列 E_A^M はこのゲージでは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 E_k^\mu|_{\theta=0} &= e_k^\mu, \\
 E_k^\alpha|_{\theta=0} &= -e_k^\mu \psi_\mu^a \delta_a^\alpha, \\
 E_a^\mu|_{\theta=0} &= 0, \\
 E_a^\alpha|_{\theta=0} &= \delta_a^\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

ここではグラビティーノは質量次元 $1/2$ を持つ場として定義されている。これは前の章のグラビティーノ（質量次元 $3/2$ ）とは 1 だけずれていることに注意。このため、単純超重力理論のラグランジアンは $\mathcal{L} \sim (1/k^2)(R + \psi\partial\psi)$ のように、グラビティーノ運動項にもニュートン定数がつく。通常の規格化に移りたければ、この章で用いられるグラビティーノに対して $\psi_\mu \rightarrow k\psi_\mu$ という置き換えを行えばよい。

“ポテンシャル” の間の関係 (3.54) が与えられたので、対応する場の強さについても、超場の中にどのように埋め込まれているかを定めることができる。捺率および曲率の定義より、次の関係式が成り立つことは明らかである。

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^m|_{\theta=0} &= T_{\mu\nu}^{(\text{boson})m}, \\
 T_{\mu\nu}^a|_{\theta=0} &= \psi_{\mu\nu}^{(\omega)a}, \\
 R_{\mu\nu}^{mn}|_{\theta=0} &= R_{\mu\nu}^{(\omega)mn}.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

ただし、左辺は x 空間上の場であり、右辺は超空間上の場である。グラビティーノの場の強さは次のように定義した。

$$\psi_{\mu\nu}^{(\omega)a} = D_\mu^{(\omega)}\psi_\nu^a - D_\nu^{(\omega)}\psi_\mu^a \tag{3.58}$$

(3.57) に与えられたテンソルはどれも接空間の添え字 μ, ν を持っていることに注意しよう。

超空間上の一般座標変換のパラメータを Ξ^M 、局所ローレンツ変換のパラメータを Σ_{mn} とする。 Ξ^M の成分のうち、 Ξ^μ はボゾンの一般座標変換に、 Ξ^α は局所的超対称変換に対応するパラメータである。これらのパラメータの $\theta = 0$ の部分が実空間上の一般座標変換、超対称変換のパラメータに対応するものである。局所ローレンツ変換については、次の関係が成り立つ。

$$\Sigma_{mn}|_{\theta=0} = \sigma_{mn}. \tag{3.59}$$

一方、一般座標変換と超対称変換については二通りに書くことができる。まず一つ目は、パラメータの持つ添え字を大域添え字とした関係式

$$\begin{aligned}
 \Xi^\mu|_{\theta=0} &= \epsilon^\mu, \\
 \Xi^\alpha|_{\theta=0} &= \xi^\alpha
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

であり、もう一つはパラメータの添え字を局所座標のものにした次の関係式である。

$$\begin{aligned}\Xi^m|_{\theta=0} &= \epsilon'^m, \\ \Xi^a|_{\theta=0} &= \xi'^a.\end{aligned}\tag{3.61}$$

(3.55) のゲージをとっている場合には、この二つは次のように関係している。

$$\epsilon'^m = \epsilon^\mu e_\mu^m, \quad \xi'^a = \xi^\alpha E_\alpha^a + \epsilon^\mu \psi_\mu^a.\tag{3.62}$$

従って、 $\epsilon^\mu = \epsilon'^m = 0$ である超対称変換については違いは無いが、 ϵ^μ および ϵ'^m が 0 ではない一般座標変換については違いが現れる。この二つは、超対称変換に対する「共変化」を行うかどうかの違いであるとみなすことができる。つまり、パラメータが $(\epsilon^\mu, \xi^\alpha = 0)$ で与えられる超空間上の一般座標変換 $\delta_{\text{gc}}(\epsilon)$ とパラメータが $(\epsilon'^m, \xi'^a = 0)$ で与えられる超空間上の一般座標変換 $\delta'_{\text{gc}}(\epsilon')$ は次のように関係している。

$$\begin{aligned}\delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}(\epsilon')|_{\theta=0} &= \delta_{\text{gc}}^{(\omega)}(\epsilon'^\mu) - \delta_Q(\epsilon'^\mu \psi_\mu^\alpha) \\ &= \delta_{\text{gc}}^{(\omega, \psi)}(\epsilon'^\mu)\end{aligned}\tag{3.63}$$

即ち、 δ'_{gc} 変換は δ_{gc} 変換に超対称変換についての共変化を行ったものであると解釈することができる。もちろん、一般座標変換として δ'_{gc} を用いるのか δ_{gc} を用いるのかは使う人の自由であり、どちらを採用してもよい。

超重力理論の off shell 定式化では、重力多重項には多脚場とグラビティーノ以外に補助場が含まれている。それらの自由度は超空間上の多脚場やスピン接続に含まれているが、多脚場やスピン接続はそれら以外にも多くの自由度を含んでおり、物理的な理論を得るためにはそれら余計な自由度を排除する必要がある。そのために、以下で述べるように換率に対して拘束条件を課す。どのような拘束条件を課せばよいのかの手がかりを得るために、超空間上の一般座標変換と以前に成分形式で得られた超対称性変換を比較してみよう。

以前に得られた超対称変換 (2.85) を思い出そう。それは次の形をしていた。

$$\begin{aligned}\delta e_\mu^m &= 2(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\ \delta \psi_\mu &= D_\mu^{(\omega)} \xi - K_\mu \xi\end{aligned}\tag{3.64}$$

ただし、 K_μ は次のように定義されるベクトル添え字をもつ行列である。

$$(K_\mu)_\alpha^\beta = \left(i\gamma_5 S_\mu + \frac{1}{4} \mathcal{W} \gamma_\mu \right)_\alpha^\beta\tag{3.65}$$

一方、対応する超空間上の一般座標変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}(0, \xi^\alpha) E_\mu^m|_{\theta=0} &= \xi^\beta T_{\beta\mu}^m|_{\theta=0}, \\ \delta_{\text{gc}}^{(\Omega)}((0, \xi^\alpha)) E_\mu^a|_{\theta=0} &= D_\mu^{(\omega)} \xi^a + \xi^\beta T_{\beta\mu}^a|_{\theta=0}\end{aligned}\tag{3.66}$$

(3.64) と (3.66) が一致するためには次の式が成り立てばよいことがわかる。

$$T_{\alpha\mu}{}^m|_{\theta=0} = -2(\gamma^m)_{\alpha\beta}\psi_\mu^\beta, \quad T_{\beta\mu}{}^a|_{\theta=0} = (K_\mu)^a{}_\beta \quad (3.67)$$

(3.67) に与えられた 2 つの式の左辺を、換率の添え字が直交座標のものになるように次のように書き換えてみよう。

$$e_\mu^k T_{ak}{}^m|_{\theta=0} - \psi_\mu^b T_{ab}{}^m|_{\theta=0} = -2(\gamma^m)_{ab}\psi_\mu^b, \quad (3.68)$$

$$e_\mu^m T_{bm}{}^a|_{\theta=0} - \psi_\mu^c T_{bc}{}^a|_{\theta=0} = (K_\mu)^a{}_b. \quad (3.69)$$

これらふたつの式の両辺を比較することにより次の式が得られる。

$$\begin{aligned} T_{ak}{}^m|_{\theta=0} &= 0, \\ T_{ab}{}^m|_{\theta=0} &= 2(\gamma^m)_{ab}, \\ T_{bm}{}^a|_{\theta=0} &= (K_m)^a{}_b, \\ T_{bc}{}^a|_{\theta=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

さらに (3.57) に与えた 3 つの関係のうち、はじめの二つの左辺の換率を直交座標系の添え字を持つもので書き換え (3.70) を用いると次の式を得る。

$$T_{mn}{}^k|_{\theta=0} = T_{mn}^{(s)k}, \quad (3.71)$$

$$T_{mn}{}^a|_{\theta=0} = \psi_{mn}^{(s)a} \quad (3.72)$$

ここで、 x^μ 空間での場の強さの超共変化

$$T_{\mu\nu}^{(s)m} = T_{\mu\nu}^{(\text{boson})m} + 2\psi_\mu^a(\gamma^k)_{ab}\psi_\nu^b, \quad (3.73)$$

$$\psi_{\mu\nu}^{(s)a} = \psi_{\mu\nu}^{(\omega)a} + (K_\mu)^a{}_b\psi_\nu^b - (K_\nu)^a{}_b\psi_\mu^b \quad (3.74)$$

を定義した。超共変化というのは、超空間の立場で解釈すれば、上で $T_{\mu\nu}^k$ と $\psi_{\mu\nu}^{(\omega)}$ について行ったように、接空間の添え字をもつテンソルを一旦超空間のテンソルに格上げし、その添え字を超空間上の多脚場を用いて直交系のものに変換し、そして再び x^μ 空間のテンソルに落としたものことである。

$$\psi_{\mu\nu}^{(\omega)a} \rightarrow T_{\mu\nu}{}^a \rightarrow T_{mn}{}^a \rightarrow \psi_{mn}^{(s)a} \quad (3.75)$$

x^μ 空間の中での超共変化の定義は、 x^μ 空間でのテンソル量について、 ψ_μ を含む項を加えることでその超対称変換が変換パラメータの微分を含まないようにしたものである。たとえば、スピン接続 $\omega_{\mu-mn}$ の変換則が ξ の微分を含まないことを仮定すると、 $\psi_{\mu\nu}^{(\omega)}$ の超対称変換は次のように ξ の微分を含む。

$$\delta_Q(\xi)\psi_{\mu\nu} = K_\mu D_\nu \xi - K_\nu D_\mu \xi + (\text{no } D\xi \text{ terms}) \quad (3.76)$$

このような $D\xi$ を含む項を現れなくするには (3.74) にあるような補正項を加えておけばよい。

以上の結果を踏まえて、超重力理論に必要な自由度だけを残すにはどのような拘束条件を課せばよいかを推測することができる。拘束条件は超空間上の共変性を破ってはならない。(3.70) に与えた $\theta = 0$ における 4 つの関係式のうち、3 つは超空間全体で成り立つ共変な関係式に拡張することができる。また、 x 空間上のスピン接続 ω が独立な自由度として現れないようにするために x 空間上の捩率 $T_{\mu\nu}{}^m$ にも何らかの条件を課す必要がある。これを超空間上での共変な条件として与えようとすると、 $T_{mn}{}^k$ を 0 に置くしかない。こうして、超空間上の次の拘束条件が得られる。[26, 27]

$$T_{mn}{}^k(x, \theta) = T_{am}{}^k(x, \theta) = T_{ab}{}^c(x, \theta) = 0, \quad T_{ab}{}^k(x, \theta) = 2(\gamma^k)_{ab}. \quad (3.77)$$

以下ではこれらの拘束条件とビアンキ恒等式を組み合わせせて解き、どれだけの独立な自由度があるかを定める。

3.4 ビアンキ恒等式の解

捩率に対する拘束条件 (3.77) をビアンキ項等式に代入すると、 $I_{abmn} = I_{abcd} = I_{akmn} = 0$ の 3 つのビアンキ項等式は捩率と曲率の間の微分を含まない代数関係を与える。これらを解くことにより、次の関係式が得られる。

$$T_{ma}{}^b = \left[\frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}^* \gamma_m + \frac{i}{2} \gamma_5 \gamma_m \mathbb{V} + \frac{i}{6} \gamma_5 \mathbb{V} \gamma_m \right] a^b, \quad (3.78)$$

$$R_{ab-mn} = 4 \left[-\frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}^* \gamma_{mn} + \frac{i}{6} \gamma_5 \mathbb{V} \gamma_{mn} + \frac{i}{6} \gamma_5 \gamma_{mn} \mathbb{V} \right]_{ab}, \quad (3.79)$$

$$R_{ampq} = (\gamma_m)_{ab} T_{pq}{}^b + (\gamma_q)_{ab} T_{pm}{}^b + (\gamma_p)_{ab} T_{mq}{}^b \quad (3.80)$$

捩率の添え字をスピノル添え字にしたものは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} T_{(\bar{a}a)\bar{b}c} &= -iC_{\bar{a}b} V_{\bar{a}c} + \frac{i}{3} C_{\bar{a}c} V_{\bar{a}b}, \\ T_{(\bar{a}a)bc} &= iC_{ab} V_{\bar{a}c} - \frac{i}{3} C_{\bar{a}c} V_{\bar{a}b}, \\ T_{(\bar{a}a)\bar{b}\bar{c}} &= -C_{\bar{a}b} C_{\bar{a}c} \mathcal{R}, \\ T_{(\bar{a}a)\bar{b}c} &= -C_{\bar{a}b} C_{\bar{a}c} \mathcal{R}^*, \\ T_{(\bar{a}a)(\bar{b}b)\bar{c}} &= -2C_{\bar{a}b} (2T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}} + C_{\bar{a}c} T_{\bar{b}} + C_{\bar{b}c} T_{\bar{a}}) - 4C_{\bar{a}b} T_{\bar{c}ab}, \\ T_{(\bar{a}a)(\bar{b}b)c} &= -2C_{\bar{a}b} (2T_{\bar{c}ab} + C_{\bar{a}c} T_{\bar{b}} + C_{\bar{b}c} T_{\bar{a}}) - 4C_{\bar{a}b} T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

ただし、 $T_{mn}{}^a$ のローレンツ群の規約表現への分解を次のように定義した。

$$\begin{aligned} T_{mn}{}^{\bar{a}} &= (\gamma_{mn})_{\bar{b}c} T^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} + (\gamma_{mn})_{bc} T^{\bar{a}bc} + (\gamma_{mn})^{\bar{a}\bar{b}} T_{\bar{b}}, \\ T_{mn}{}^a &= (\gamma_{mn})_{bc} T^{abc} + (\gamma_{mn})_{\bar{b}c} T^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} + (\gamma_{mn})^{\bar{a}\bar{b}} T_{\bar{b}}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

曲率については以下の通り

$$\begin{aligned}
R_{\underline{a}(\bar{b}\bar{b})\bar{c}\bar{d}} &= C_{\underline{ab}}(C_{\bar{b}\bar{c}}T_{\bar{d}} + C_{\bar{b}\bar{d}}T_{\bar{c}}) + 2(C_{\bar{b}\bar{c}}T_{\bar{d}\bar{a}\bar{b}} + C_{\bar{b}\bar{d}}T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}}) - 8C_{\underline{ab}}T_{\bar{b}\bar{c}\bar{d}}, \\
R_{\bar{a}(\bar{b}\bar{b})\underline{c}\underline{d}} &= C_{\bar{a}\bar{b}}(C_{\underline{bc}}T_{\underline{d}} + C_{\underline{bd}}T_{\underline{c}}) + 2(C_{\underline{bc}}T_{\bar{d}\bar{a}\bar{b}} + C_{\underline{bd}}T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}}) - 8C_{\bar{a}\bar{b}}T_{\underline{b}\underline{c}\underline{d}}, \\
R_{\underline{a}(\bar{b}\bar{b})\underline{c}\underline{d}} &= 3(C_{\underline{ac}}C_{\underline{bd}} + C_{\underline{ad}}C_{\underline{bc}})T_{\bar{b}} - 2(C_{\underline{ac}}T_{\bar{b}\underline{d}\underline{b}} + C_{\underline{ad}}T_{\bar{b}\underline{c}\underline{b}} + 2C_{\underline{ab}}T_{\bar{b}\underline{c}\underline{d}}), \\
R_{\bar{a}(\bar{b}\bar{b})\bar{c}\bar{d}} &= 3(C_{\bar{a}\bar{c}}C_{\bar{b}\bar{d}} + C_{\bar{a}\bar{d}}C_{\bar{b}\bar{c}})T_{\underline{b}} - 2(C_{\bar{a}\bar{c}}T_{\underline{b}\bar{d}\bar{b}} + C_{\bar{a}\bar{d}}T_{\underline{b}\bar{c}\bar{b}} + 2C_{\bar{a}\bar{b}}T_{\underline{b}\bar{c}\bar{d}}), \\
R_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} &= -2(C_{\bar{a}\bar{c}}C_{\bar{b}\bar{d}} + C_{\bar{a}\bar{d}}C_{\bar{b}\bar{c}})\mathcal{R}^*, \\
R_{\underline{a}\underline{b}\underline{c}\underline{d}} &= -2(C_{\underline{ac}}C_{\underline{bd}} + C_{\underline{ad}}C_{\underline{bc}})\mathcal{R}, \\
R_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\underline{d}} &= 0, \\
R_{\underline{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} &= 0, \\
R_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} &= -\frac{2i}{3}(C_{\bar{a}\bar{c}}V_{\bar{d}\bar{b}} + C_{\bar{a}\bar{d}}V_{\bar{c}\bar{b}}), \\
R_{\bar{a}\underline{b}\underline{c}\underline{d}} &= \frac{2i}{3}(C_{\underline{bc}}V_{\bar{d}\bar{a}} + C_{\underline{bd}}V_{\bar{c}\bar{a}}) \tag{3.83}
\end{aligned}$$

いくつかの添え字を縮約したのもも後でしばしば用いられるので、与えておこう。

$$\begin{aligned}
T_{(\bar{a}\bar{b})\bar{c}}^{\underline{b}} &= \frac{i5}{3}V_{\bar{a}\bar{c}}, \\
T_{(\bar{a}\bar{b})\underline{c}}^{\underline{b}} &= \frac{i}{3}V_{\bar{a}\bar{c}}, \\
T_{(\bar{a}\bar{b})\bar{c}}^{\underline{b}} &= -2C_{\bar{a}\bar{c}}\mathcal{R}, \\
T_{(\bar{a}\bar{b})\underline{c}}^{\underline{b}} &= -2C_{\bar{a}\bar{c}}\mathcal{R}^*, \\
C^{\underline{ab}}T_{(\bar{a}\underline{a})(\bar{b}\bar{b})\bar{c}} &= -4(2T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}} + C_{\bar{a}\bar{c}}T_{\bar{b}} + C_{\bar{b}\bar{c}}T_{\bar{a}}), \\
C^{\bar{a}\bar{b}}T_{(\bar{a}\underline{a})(\bar{b}\bar{b})\bar{c}} &= -8T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}}, \\
T_{(\bar{a}\underline{a})(\bar{b}\bar{c})}^{\bar{b}} &= -6C_{\underline{ac}}T_{\bar{a}} + 4T_{\bar{a}\underline{a}\bar{c}}. \tag{3.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{b}}{}_{\bar{c}} &= -6C_{\bar{a}\bar{c}}\mathcal{R}^*, \\
R_{\bar{a}\underline{b}}^{\underline{b}}{}_{\underline{c}} &= 2iV_{\bar{c}\bar{a}} \tag{3.85}
\end{aligned}$$

超場の θ 微分を他の超場で与える幾つかの式がピアンキ恒等式から得られる。次はそのようなものを見てみよう。

$I_{\bar{a}\bar{b}m\underline{c}} = 0$ からは次の式が得られる。

$$D_{\underline{a}}\mathcal{R} = 0. \tag{3.86}$$

すなわち、 \mathcal{R} はカイラル超場である。次に、 $I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\underline{c})\bar{d}} = 0$ について試みる。これは、 \underline{bc} についての対称部分、 \underline{bc} に対する反対称部分の中で $\bar{c}\bar{d}$ についても反対称な部分、

bc に対する反対称部分の中で $\bar{c}\bar{d}$ について対称な部分、の 3 つに分解すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
0 &= I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{e})\bar{d}}|_{\{bc\}} = \left(C_{\bar{c}\bar{a}}C_{\bar{d}}^{\bar{e}} - \frac{1}{3}C_{\bar{c}\bar{d}}C_{\bar{a}}^{\bar{e}} \right) \left(\frac{i}{2}D_{\bar{b}}V_{\bar{c}\bar{e}} + \frac{i}{2}D_{\bar{e}}V_{\bar{b}\bar{c}} + 6T_{\bar{e}bc} \right), \\
0 &= I_{\bar{a}^c(\bar{c}\bar{e})}^{\bar{c}} = 4D_{\bar{a}}\mathcal{R} - \frac{i}{3}D_{\bar{b}}V_{\bar{a}}^b + 30T_{\bar{a}}, \\
0 &= I_{\bar{a}^c(\bar{c}\bar{e})\bar{d}}|_{\{\bar{c}\bar{d}\}} = C_{\bar{a}\bar{d}}(iD_{\bar{b}}V_{\bar{c}}^b + 6T_{\bar{c}})|_{\{\bar{c}\bar{d}\}}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

こうして、 $I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{e})\bar{d}} = 0$ より次の 3 つの関係式が得られた。

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}D_{\bar{b}}V_{\bar{c}\bar{a}} + \frac{i}{2}D_{\bar{e}}V_{\bar{b}\bar{a}} + 6T_{\bar{a}bc} &= 0, \\
4D_{\bar{a}}\mathcal{R} - \frac{i}{3}D_{\bar{b}}V_{\bar{a}}^b + 30T_{\bar{a}} &= 0, \\
iD_{\bar{b}}V_{\bar{a}}^b + 6T_{\bar{a}} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

実は、これらの式を用いると、 $I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{e})\bar{d}} = 0$ も自動的に成り立つことを示すことができる。(3.88) のうちしる二つの関係式は次のように整理することができる。

$$D_{\bar{a}}\mathcal{R} = \frac{4i}{3}D_{\bar{b}}V_{\bar{a}}^b = -8T_{\bar{a}} \tag{3.89}$$

これらの式を用いることで \mathcal{R} や V_m の θ 座標微分を他の超場で書き換えることができる。

(3.88) の最初の式と最後の式を組み合わせれば次の式が導かれる。

$$D_{\bar{b}}V_{\bar{c}\bar{a}} = 3iT_{\bar{a}}C_{bc} + i6T_{\bar{a}bc}, \tag{3.90}$$

今度は次のビアンキ恒等式について考えてみよう。

$$I_{mna}{}^b = D_m T_{na}{}^b - D_n T_{ma}{}^b + D_a T_{mn}{}^b - T_{na}{}^c T_{mc}{}^b + T_{ma}{}^c T_{nc}{}^b + R_{mna}{}^b = 0. \tag{3.91}$$

この式を既約分解すると幾つかの独立な関係式を与えるが、そのうちの一つは

$$D_{\bar{a}}T_{mn}^{(4,1)\bar{b}} = 0. \tag{3.92}$$

である。つまり、グラビティーノのスピン 3/2 成分はカイラル超場をなす。

残るは $I_{mnp}{}^q$ および $I_{mnp}{}^a$ である。これらは曲率テンソルおよびグラビティーノに対するビアンキ恒等式を与える。

$$I_{mnp}{}^q \propto R_{mnp}{}^q + R_{npm}{}^q + R_{pmn}{}^q = 0. \tag{3.93}$$

$$I_{mnp}{}^a \propto (D_m T_{np}{}^a + T_{mn}{}^b T_{bp}{}^a)_{[mnp]} = 0. \tag{3.94}$$

これらは曲率テンソルとグラビティーノの場の強さが対応するポテンシャルを用いて書けることを保障している。たとえば、 $I_{mnp}^1 = 0$ は $T_{\mu\nu}^k$ が次のように書けることを保障している。

$$T_{\mu\nu}^k = D_\mu e_\nu^k - D_\nu e_\mu^k = \partial_\mu e_\nu^k - \partial_\nu e_\mu^k + \omega_\mu^k l e_\nu^l - \omega_\nu^k l e_\mu^l. \quad (3.95)$$

この式を ω についてとくことでスピン接続を e と ψ を用いて表すことができる。

T_{mn}^a を規約分解して定義される場の θ 微分を決めるためにはビアンキ項等式 $I_{mnab} = 0$ を用いる。そこから得られるいくつかの式を与えておく。

$$\begin{aligned} 0 = C^{ab} I_{(\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{b})}^{\bar{a}\bar{b}} &= -12D^{\bar{a}}T_{\bar{a}} + 4iD_m V^m - \frac{8}{3}V_m V^m - 12\mathcal{R}\mathcal{R}^* - R_{mn}{}^{mn} \\ 0 = I_{(\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{b})\bar{c}\bar{d}}|_{(4,2)} &= -4C_{\underline{ab}}D_{\underline{c}}T_{\bar{a}\bar{b}\bar{d}}, \\ 0 = I_{(\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{b})\bar{c}\bar{d}}|_{(5,1)} &= -4C_{\underline{ab}}D_{\underline{c}}T_{\bar{a}\bar{b}\bar{d}}|_{(5,1)} + R_{(\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{b})\bar{c}\bar{d}}|_{(5,1)} \end{aligned} \quad (3.96)$$

3.5 重力多重項

重力多重項の成分場を定義し、その変換則を決定しよう。独立な成分場の組を得るには、スピノル微分で閉じている超場の組を作り、それらの初項によって成分場を定義すればよい。「スピノル微分で閉じている」というのは、その組の中の任意の超場に対してそのスピノル微分が他の場のスピノル微分を含まない式によって与えられることを意味する。この条件は、超対称変換が成分場の中で閉じていることを保障する。

拘束条件とビアンキ恒等式を解いて得られた超場については、スピノル微分に対して閉じた超場の組は以下のように与えることができる。

$$\mathcal{R}, \quad V_m, \quad T_{mn}{}^\alpha, \quad R_{mn}{}^{pq}. \quad (3.97)$$

従って、成分場はこれらの初項として次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}|_{\theta=0} &= M, \\ V_m|_{\theta=0} &= c_m, \\ T_{mn}{}^\alpha|_{\theta=0} &= \psi_{mn}^{(s)}, \\ R_{mn}{}^{pq}|_{\theta=0} &= R_{mn}^{(s) pq}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

ただしこれらのうち最後の二つについては、スピノル微分を含まないビアンキ恒等式

$$\begin{aligned} I_{mnp}{}^\alpha &= 0, \\ I_{mnp}{}^k &= 0, \\ I_{mnp}{}^{kl} &= 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

を満足する。これらは、「場の強さ」 $\psi_{mn}^{(s)}$ および $R_{mn}^{(s)pq}$ が次のように定義される「ポテンシャル」の微分として表すことができることを保障している。

$$e_\mu^m = E_\mu^m|_{\theta=0}, \quad (3.100)$$

$$\psi_\mu^a = E_\mu^a|_{\theta=0}, \quad (3.101)$$

$$\omega_{\mu-mn} = \Omega_{\mu-mn}|_{\theta=0}. \quad (3.102)$$

多脚場とスピン接続のこれら以外の成分は次のようにゲージ固定しておく。

$$E_\alpha^m|_{\theta=0} = 0, \quad (3.103)$$

$$E_\alpha^b|_{\theta=0} = \delta_\alpha^b, \quad (3.104)$$

$$\Omega_{\alpha-mn}|_{\theta=0} = 0, \quad (3.105)$$

具体的な場の強さの表式は (3.98) の後ろ二つの式を

$$T_{\mu\nu}^a|_{\theta=0} = \psi_{\mu\nu}^{(\omega)\alpha}, \quad (3.106)$$

$$R_{\mu\nu-pq}|_{\theta=0} = R_{\mu\nu-pq}^{(\omega)} \quad (3.107)$$

と比較することによって次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \psi_{mn}^{(s)} &= D_m \psi_n - i\gamma_5 c_m \psi_n + \frac{i}{3} \gamma_5 \gamma_m \not{\epsilon} \psi_n + \frac{1}{2} \widehat{M} \gamma_m \psi_n - [m \leftrightarrow n], \\ R_{\mu\nu pq}^{(s)} &= R_{\mu\nu pq} + [\psi_\mu \gamma_\nu \psi_{pq}^{(s)} + \psi_\mu \gamma_q \psi_{p\nu}^{(s)} - \psi_\mu \gamma_p \psi_{q\nu}^{(s)}] \\ &\quad - [\psi_\nu \gamma_\mu \psi_{pq}^{(s)} + \psi_\nu \gamma_q \psi_{p\mu}^{(s)} - \psi_\nu \gamma_p \psi_{q\mu}^{(s)}] \\ &\quad - 4\psi_\mu \left[-\frac{1}{2} \widehat{M}^* \gamma_{pq} + \frac{i}{6} \gamma_5 \not{\epsilon} \gamma_{pq} + \frac{i}{6} \gamma_5 \gamma_{pq} \not{\epsilon} \right] \psi_\nu \\ R_{mn}^{(s)mn} &= R_{mn}^{mn} + 4(\psi_\mu \gamma_\nu \psi^{\mu\nu}) + 4i(\psi_\lambda \gamma_5 \gamma^\lambda \psi_\mu) c^\mu - 6(\psi_\mu \widehat{M}^* \psi^\mu) \end{aligned} \quad (3.108)$$

直交系の添え字のみを持つ超場に対しては、変換則は $\delta\Phi = \Xi^M D_M \Phi$ によって与えられる。ポテンシャル場に対しては超空間上の多脚場の変換則 $\delta_{\text{gc}}^{(\Omega)} E_M^A = D_M \Xi^A + \Xi^K T_{KM}^A$ より得ることができる。これら超場に対する変換則の $\theta = 0$ 成分を取るこ

とによって以下の変換則が得られる。¹

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{2}{3}(\xi_L \gamma^{mn} \psi_{Lmn}^{(s)}) \\
&= \frac{2}{3}(\xi_L \gamma^{pq} \psi_{Lpq}) - 2M(\xi_L \gamma^p \psi_{Rp}) - \frac{4i}{3}c^p(\xi_L \psi_{Lp}), \\
\delta c_m &= -\frac{3i}{2}(\xi \gamma_5 \gamma^p \psi_{pm}^{(s)}) - \frac{i}{4}(\xi \gamma_5 \gamma_m \gamma^{kl} \psi_{kl}^{(s)}) \\
&= -i(\xi \gamma_5 \gamma^q \psi_{qm}) - \frac{i}{4}(\xi \gamma_5 \gamma_m^{pq} \psi_{pq}) - \frac{3i}{2}(\xi \gamma_5 \widehat{M}^* \psi_m) \\
&\quad - c_m(\xi \gamma^k \psi_k) + \frac{1}{2}c_k(\xi \gamma_m^{kn} \psi_n), \\
\delta \psi_{L\mu} &= D_\mu \xi_L + \frac{1}{2}M \gamma_\mu \xi_R - \frac{i}{6}c_n(3\gamma^n \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma^n)\xi_L, \\
\delta e_\mu^m &= 2(\xi \gamma^m \psi_\mu). \tag{3.109}
\end{aligned}$$

超共変化された共変微分 $D^{(s)}$ は、超場の共変微分の初項として定義される。たとえば、補助場 c_m の超共変化された微分は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
D_m^{(s)} c_n &= D_m^{(\Omega)} V_n |_{\theta=0} \\
&= (E_m^\mu D_\mu^{(\Omega)} V_n + E_m^\alpha D_\alpha^{(\Omega)} V_n) |_{\theta=0} \\
&= e_m^\mu D_\mu^{(\omega)} c_n - \psi_m^\alpha D_\alpha V_n |_{\theta=0} \\
&= D_m^{(\omega)} c_n + \frac{i}{4} \psi_m \left(6\gamma_5 \gamma^p \psi_{pn}^{(s)} + \gamma_5 \gamma_n \gamma^{pq} \psi_{pq}^{(s)} \right) \tag{3.110}
\end{aligned}$$

成分場の超対称変換や作用を書くためには、超場のスピノル微分を他の超場を用いて表す必要がある。そのような式をいくつか与えておこう。

$$\begin{aligned}
D_a V_m &= -\frac{3i}{2}(\gamma_5 \gamma^p T_{pm}^{(3,2)+(2,3)})_a - \frac{i}{2}(\gamma_5 \gamma^p T_{pm}^{(1,2)+(2,1)})_a, \\
D_{\underline{a}} T_{mn}^{(4,1)\bar{b}} &= 0, \\
D_{\bar{a}} T_{mn}^{(4,1)\bar{b}} &= \left[-\frac{2i}{3}V_{mn}^+ + \frac{i}{6}\gamma_m^k V_{nk}^+ - \frac{i}{6}\gamma_n^k V_{mk}^+ \right]_{\bar{a}}^{\bar{b}} - R_{mn\bar{a}}^{(5,1)\bar{b}}, \\
D_{\bar{a}} T^{(1/2)\bar{b}} &= \left(\frac{i}{6}D_m V^m - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{R}^* - \frac{1}{9}V_m V^m - \frac{1}{24}R_{mn}{}^{mn} \right) C_{\bar{a}}^{\bar{b}}, \\
D_{\underline{a}} T^{(1/2)\bar{b}} &= \frac{1}{4}(\gamma^m)_{\underline{a}}^{\bar{b}} D_m \mathcal{R} \tag{3.111}
\end{aligned}$$

ただし、 $V_{mn} = D_m V_n - D_n V_m$ であり、 V_{mn}^+ はその自己双対部分である。

カイラル超場 \mathcal{R} の成分場は (3.89) と (3.96) の第 1 式を用いることにより次のよう

¹WB (18.23) に対応している

に得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}|_{\theta=0} &= M, \\
D_{\bar{a}}\mathcal{R}|_{\theta=0} &= -8\psi_{\bar{a}}^{(s)} = \frac{2}{3}(\gamma^{pq}\psi_{Lpq}^{(s)})_{\bar{a}}, \\
\frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}\mathcal{R}|_{\theta=0} &= \frac{2i}{3}D_m^{(s)}c^m - \frac{4}{9}c_m c^m - 2MM^* - \frac{1}{6}R_{mn}^{(s)mn} \quad (3.112)
\end{aligned}$$

\mathcal{R} はその F 成分にスカラー曲率を含むことから、スカラー曲率超場とも呼ばれる。

カイラル超場 $T^{(4,1)}$ はワイルテンソルを含んでおり、ワイル超場と呼ばれる。この超場は、ゲージ理論の場の強さを含む超場 $W_{\bar{a}}$ に対応するものであり、コンフォーマル重力理論のラグランジアンはワイル超場を二つ掛けてスカラーのカイラル超場を作り、この F -項ラグランジアンとして得ることができる。(超重力理論における F -項ラグランジアンの作り方は後で述べる。) また、ポアンカレ超重力理論の場合には、運動方程式で 0 にならない物理的な自由度を含む超場である。

V_m を 1 回微分すると $T^{(2,3)+(3,2)}$ を含む。さらにもう一度微分してみよう。(3.91) を用いれば

$$-D\gamma_{\{m}\gamma^k T_{n\}k} = -2R_{mn} - 6\mathcal{R}\mathcal{R}^*\eta_{mn} + \frac{16}{9}(V_m V_n - \eta_{mn} V_k V^k) \quad (3.113)$$

が得られる。このように V_m はアインシュタインテンソルを含んでいるためアインシュタイン超場と呼ばれる。物質場を含まない単純超重力理論の運動方程式は $V_m = 0$ によって与えることができる。

3.6 カイラル射影演算子

ここでは、電荷を持たない超場に対して、その成分場を定義し、成分場間の超対称変換則を与える。そのための準備として、カイラル射影演算子を定義する。

Φ を一般の超場としよう。この超場は一般にはスピンの添え字、すなわち局所直交系の添え字を持っていても良いとする。ただしゲージ場には結合していないものとする。ゲージ変換のもとでの電荷を持つ場については、ゲージ多重項を導入した後で再び議論することにする。

この超場に対して条件 $D_{\bar{a}}\Phi = 0$ を課すことによってカイラル超場を定義することができる。ただし、交換関係 $\{D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}\}\Phi = R_{\bar{a}\bar{b}}\Phi$ と矛盾しないためには、 Φ がローレンツ群の右スピンを持たない超場であることが必要である。このときには $R_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} = 0$ により右辺の曲率項は消えて

$$\{D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}\}\Phi_L = 0 \quad (3.114)$$

が成り立ち、カイラル超場を定義することができる。ここで、 Φ が右スピンを持たないことを強調するために Φ_L と書いた。これまでに現れた添え字を持ったカイラル超場の例としては、重力多重項に含まれるカイラル超場 $T_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ がある。

(3.114) より、次の式を示すことができる。

$$D_{\underline{a}}D_{\underline{b}}D_{\underline{c}}\Phi_L = \frac{1}{3}C_{\underline{bc}}\{D_{\underline{a}}, D_{\underline{d}}\}D^{\underline{d}}\Phi_L \quad (3.115)$$

さらに交換関係を曲率テンソルを用いて書き換えれば

$$\begin{aligned} D_{\underline{a}}D_{\underline{b}}D_{\underline{c}}\Phi_L &= -2C_{\underline{bc}}\mathcal{R}D_{\underline{a}}\Phi_L, \\ D_{\bar{a}}D_{\bar{b}}D_{\bar{c}}\Phi_R &= -2C_{\bar{bc}}\mathcal{R}^*D_{\bar{a}}\Phi_R. \end{aligned} \quad (3.116)$$

が得られる。ローレンツ左スピンを持たない超場 Φ_R に対する類似の式も与えておいた。これらの式の二つのスピノル添え字を縮約することにより次の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} D_{\underline{a}}P_{\text{chiral}}\Phi_L &= 0, \\ D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}^*\Phi_R &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

ただし、 P_{chiral} および P_{chiral}^* は次のように定義される微分演算子である。

$$\begin{aligned} P_{\text{chiral}} &= \frac{1}{4}D_{\underline{b}}D^{\underline{b}} + \mathcal{R}, \\ P_{\text{chiral}}^* &= \frac{1}{4}D_{\bar{b}}D^{\bar{b}} + \mathcal{R}^*. \end{aligned} \quad (3.118)$$

(3.117) は、超場 $P_{\text{chiral}}\Phi_L$ がカイラルであることを表している。このことから P_{chiral} はカイラル射影演算子と呼ばれる。これは超対称性が大域的な場合における演算子 $(1/4)D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}$ に相当するものである。

電荷を持たないスカラー超場 V に対して、その成分場を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} B &= V|_{\theta=0}, \\ \eta_{\bar{a}} &= D_{\bar{a}}V|_{\theta=0}, \\ C &= \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}V|_{\theta=0}, \\ v_m &= \frac{i}{4}(\gamma_m)^{\bar{a}b}[D_{\bar{a}}, D_{\underline{b}}]V|_{\theta=0}, \\ \lambda_{\bar{a}} &= iP_{\text{chiral}}D_{\bar{a}}V|_{\theta=0}, \\ D &= \frac{1}{2}D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}V|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3.119)$$

成分場 v_m については次の式も有用である。

$$[D_{\bar{a}}, D_{\underline{b}}]V|_{\theta=0} = 2i(\gamma^m)_{\bar{a}b}v_m \quad (3.120)$$

成分場 C の定義には演算子 $(1/4)D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}$ を用いているのに対して、成分場 λ や D の定義においては P_{chiral} を用いていることに注意しよう。成分場 D の右辺に現れる微分演算子について次の関係式が成り立つことは重要である。

$$D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}V = D_{\underline{a}}P_{\text{chiral}}^*D^{\underline{a}}V \quad (3.121)$$

この関係式のおかげで、超場 V が実であれば成分場 D もやはり実になる。

スカラー超場 V に対する超対称変換 $\delta V = \xi^a D_a V$ から読み取られる成分場の超対称変換は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_Q B &= \xi \eta, \\
\delta_Q \eta_L &= 2\xi_L C + i v_m \gamma^m \xi_R + (D_m^{(s)} B) \gamma^m \xi_R, \\
\delta_Q \eta_R &= 2\xi_R C^* - i v_m \gamma^m \xi_L + (D_m^{(s)} B) \gamma^m \xi_L, \\
\delta_Q C &= (\xi_R \gamma^m D_m^{(s)} \eta_L) + \frac{i}{3} (\xi_R \not{\xi} \eta_L) + i (\xi_R \lambda_R) - M^* (\xi_L \eta_L), \\
\delta_Q C^* &= (\xi_L \gamma^m D_m^{(s)} \eta_R) - \frac{i}{3} (\xi_L \not{\xi} \eta_R) - i (\xi_L \lambda_L) - M (\xi_R \eta_R), \\
\delta_Q v_m &= (\xi \gamma_m \lambda) - i (\xi \gamma_5 D_m^{(s)} \eta) + \frac{1}{2} \xi \left(\gamma_m \not{\xi} + \frac{1}{3} \not{\xi} \gamma_m \right) \eta + \frac{i}{2} \xi \gamma_5 \widehat{M}^* \gamma_m \eta, \\
\delta_Q \lambda_L &= i \xi_L D - \frac{1}{2} \gamma^{pq} F_{pq}^{(s)} \xi_L, \\
\delta_Q \lambda_R &= -i \xi_R D - \frac{1}{2} \gamma^{pq} F_{pq}^{(s)} \xi_R, \\
\delta_Q D &= i (\xi \gamma_5 \gamma^k D_k^{(s)} \lambda). \tag{3.122}
\end{aligned}$$

ただし、変換則中に現れた超共変微分 $D_\mu^{(s)}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(s)} B &= \partial_\mu B - (\psi_\mu \eta), \\
D_\mu^{(s)} \eta_L &= D_\mu \eta_L - 2\psi_{L\mu} C - i \gamma^k \psi_{R\mu} v_k - \gamma^k \psi_{R\mu} D_k^{(s)} B \tag{3.123}
\end{aligned}$$

さらに、 $F_{mn}^{(s)}$ は次のように定義される。

$$D_{\{\bar{a} P_{\text{chiral}} D_{\bar{b}}\}} V|_{\theta=0} = -\frac{i}{2} (\gamma^{pq})_{\bar{a}\bar{b}} F_{pq}^{(s)} \tag{3.124}$$

これは v_m を $U(1)$ ゲージ場と解釈すればその場の強さに相当するものであるが、単純に $F = dv$ ではないことに注意しなければならない。この点については後にゲージ多重項を導入する際に詳しく見ることにする。

次に、カイラル条件

$$D_{\underline{a}} \Phi = 0 \tag{3.125}$$

を満足するカイラル超場について考えよう。ただしこの節の始めに述べたように、超場 Φ はローレンツ右スピンを持ってはならない。成分場は次のように定義する。

[28]

$$\begin{aligned}
\phi &= \Phi|_{\theta=0}, \\
\chi_{\bar{a}} &= D_{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0}, \\
F &= \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} \Phi|_{\theta=0}. \tag{3.126}
\end{aligned}$$

Φ は一般のスカラー超場の特殊な場合とみなすことができるが、その場合成分は次のように与えられる。

$$B = \phi, \quad \eta^{\bar{a}} = \chi^{\bar{a}}, \quad C = F, \quad v_m = -iD_m^{(s)}\phi, \quad \eta^a = C^* = \lambda^{\bar{a}} = \lambda^a = D = 0. \quad (3.127)$$

$\delta\Phi = \xi^a D_a \Phi$ から読み取られる超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= (\xi_L \chi_L), \\ \delta\chi_L &= 2\gamma^m \xi_R D_m^{(s)}\phi + 2\xi_L F, \\ \delta F &= (\xi_R \mathcal{D}^{(s)}\chi_L) + \frac{i}{3}(\xi_R \chi_L) - M^*(\xi_L \chi_L) \end{aligned} \quad (3.128)$$

ただし、変換則中に現れる超共変化された微分 $D_\mu^{(s)}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} D_\mu^{(s)}\phi &= \partial_\mu\phi - (\psi_{L\mu}\chi_L), \\ D_\mu^{(s)}\chi_L &= D_\mu\chi_L - 2\psi_{L\mu}F - 2\gamma^\lambda\psi_{R\mu}D_\lambda^{(s)}\phi \end{aligned} \quad (3.129)$$

3.7 ゲージ多重項

ゲージ多重項の構成は §1.7 において説明した大域的超対称理論の場合とほとんど同じである。コンパクトゲージ群 G に対して超空間上のゲージポテンシャルをリー代数に値を取る 1-形式場 $A = dz^M A_M$ として導入し、場の強さを $F = dA$ とする。共変微分は次のように定義する。

$$\mathcal{D}_M X = D_M X - iA_M X \quad (3.130)$$

場の強さは、直交系の添え字を持つ場を用いると次のように与えられる。

$$F_{AB} = D_A A_B - (-)^{AB} D_B A_A - iA_A A_B + (-)^{AB} iA_B A_A + T_{AB}{}^C A_C \quad (3.131)$$

この場の強さに対しては次の拘束条件をおく。

$$F_{ab} = 0 \quad (3.132)$$

さらに、ビアンキ項等式は次のように与えられる。

$$0 = \frac{1}{6}E^N E^M E^K I_{KMN} = \frac{1}{2}E^N E^M E^K (\mathcal{D}_K F_{MN} + T_{KM}{}^L F_{LN}) \quad (3.133)$$

ビアンキ項等式 (3.133) のうち、 $I_{abc} = I_{abm} = 0$ を解くことにより、次の関係式を得ることができる。

$$F_{ma} = (\gamma_m)_{ab} \widetilde{W}^b, \quad F_{mn} = \frac{1}{4}(\gamma_{mn})^{ab} \mathcal{D}_a \widetilde{W}_b \quad (3.134)$$

ただし、 \widetilde{W} は次の条件を満足する超場である。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}_{\underline{b}} &= 0, \\ \mathcal{D}_{\underline{a}}\widetilde{W}_{\bar{b}} &= 0, \\ \mathcal{D}_{\underline{a}}\widetilde{W}^{\underline{a}} &= 0.\end{aligned}\tag{3.135}$$

始めの二つは $\widetilde{W}_{\bar{a}}$ がカノニカルなカイラル超場であることを表している。最後の関係式は、ゲージ場のピアンキ項等式に相当するものである。これらの関係式から得られる以下の式も有用である。

$$\begin{aligned}F_{(\bar{a}\underline{a})\bar{b}} &= 2C_{\bar{a}\bar{b}}\widetilde{W}_{\underline{a}}, \\ F_{(\bar{a}\underline{a})\underline{b}} &= 2C_{\underline{a}\underline{b}}\widetilde{W}_{\bar{a}}, \\ F_{(\bar{a}\underline{a})(\bar{b}\underline{b})} &= -\frac{1}{2}C_{\underline{a}\underline{b}}(\mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}_{\bar{b}} + \mathcal{D}_{\bar{b}}\widetilde{W}_{\bar{a}}) - \frac{1}{2}C_{\bar{a}\bar{b}}(\mathcal{D}_{\underline{a}}\widetilde{W}_{\underline{b}} + \mathcal{D}_{\underline{b}}\widetilde{W}_{\underline{a}}), \\ F_{mn}(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}} &= \mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}_{\bar{b}} + \mathcal{D}_{\bar{b}}\widetilde{W}_{\bar{a}}, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}_{\bar{b}} &= \frac{1}{2}F_{mn}(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}} + \frac{1}{2}C_{\bar{a}\bar{b}}\mathcal{D}_{\bar{c}}\widetilde{W}^{\bar{c}}\end{aligned}\tag{3.136}$$

ゲージ多重項の成分場は次のように定義される。

$$\begin{aligned}A_{\mu}|_{\theta=0} &= v_{\mu}, \\ \widetilde{W}^{\bar{a}}|_{\theta=0} &= \lambda_{\bar{a}}, \\ -\frac{i}{2}\mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}^{\bar{a}}|_{\theta=0} &= D.\end{aligned}\tag{3.137}$$

(3.135) の三番目の式より D が実であることが示される。

ここまでの式は形式的に大域的超対称性の場合と全く同じであるが、超重力理論において特に注意すべき点は成分場 v_{μ} の定義が $A_{\mu}|_{\theta=0} = v_{\mu}$ ではないことである。カイラル超場 \widetilde{W} の成分場は、これらを用いて次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\bar{b}}|_{\theta=0} &= \lambda_{\bar{b}}, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}_{\bar{b}}|_{\theta=0} &= \frac{1}{2}F_{mn}^{(s)}(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}} + iC_{\bar{a}\bar{b}}D, \\ \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}^{\bar{a}}\widetilde{W}_{\bar{b}}|_{\theta=0} &= \mathcal{D}_{\bar{b}}^{(s)c}\lambda_{\underline{c}} + i\mathcal{D}_{\bar{b}}^{\bar{c}}\lambda_{\underline{c}} - \frac{3}{2}M^*\lambda_{\bar{b}}\end{aligned}\tag{3.138}$$

二番目の式は (3.136) の $\theta = 0$ 成分を取ることで得られる。最後の式を得るには、(3.136) を θ 微分し、ピアンキ項等式

$$C^{\underline{a}\underline{b}}F_{(\bar{a}\underline{a})(\bar{b}\underline{b})} = -\mathcal{D}^{\bar{c}}F_{mn}(\gamma^{mn})_{\bar{c}\bar{b}} + 6\mathcal{D}_{\bar{c}}\widetilde{W}^{\underline{c}} + 6iV_{\bar{c}\bar{b}}\widetilde{W}^{\underline{c}} + 12\mathcal{D}^*\widetilde{W}_{\bar{b}}\tag{3.139}$$

を用いて F のスピノル共変微分を他の場で表せばよい。

カノニカルなスカラーカイラル超場 \widetilde{W}_L^2 の成分場は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_L^2|_{\theta=0} &= (\lambda_L \lambda_L), \\
\mathcal{D}_{\bar{a}} \widetilde{W}_L^2|_{\theta=0} &= F_{mn}^{(s)} (\gamma^{mn} \lambda_L)_{\bar{a}} + 2i \lambda_{\bar{a}} D, \\
\frac{1}{4} \mathcal{D}_{\bar{a}} \mathcal{D}^{\bar{a}} \widetilde{W}_L^2|_{\theta=0} &= 2(\lambda_L \not{\mathcal{D}}^{(s)} \lambda_R) + F_{mn}^{(s)(+)} F^{(s)(+)mn} - D^2 \\
&\quad + 2i(\lambda_L \not{\xi} \lambda_R) - 3M^*(\lambda_L \lambda_L)
\end{aligned} \tag{3.140}$$

成分場の超対称変換は、 $\delta A_M = \xi^N F_{NM}$ および $\delta W_{\bar{a}} = \xi^b \mathcal{D}_b \widetilde{W}_{\bar{a}}$ などから次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta v_{\mu} &= (\xi \gamma_{\mu} \lambda), \\
\delta \lambda_L &= -\frac{1}{2} F_{mn}^{(s)} \gamma^{mn} \xi_L + iD \xi_L, \\
\delta D &= i(\xi \gamma_5 \not{\mathcal{D}}^{(s)} \lambda) + (\xi \not{\xi} \lambda)
\end{aligned} \tag{3.141}$$

変換則中に現れる λ の超共変微分や超共変な場の強さ $F_{mn}^{(s)}$ は成分場を用いて次のように展開される。

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mu}^{(s)} \lambda &= \mathcal{D}_{\mu} \lambda + \frac{1}{2} F_{mn}^{(s)} \gamma^{mn} \psi_{\mu} - iD \gamma_5 \psi_{\mu}, \\
F_{mn}^{(s)} &= F_{mn}|_{\theta=0} \\
&= F_{mn} - (\psi_m \gamma_n \lambda) + (\psi_n \gamma_m \lambda)
\end{aligned} \tag{3.142}$$

大域的超対称性の場合と同様に、ゲージ場に対する拘束条件 (3.132) を解くことによってプレポテンシャル M を導入することができる。

$$\begin{aligned}
A_{\bar{a}} &= iM^{-1\dagger} D_{\bar{a}} M^{\dagger}, \\
A_{\underline{a}} &= iM D_{\underline{a}} M^{-1}, \\
A_m &= \frac{1}{4} (\gamma_m)^{ab} (D_a A_b - iA_a A_b).
\end{aligned} \tag{3.143}$$

M は複素化された群 G_C の元である。

プレポテンシャルを用いることで次のようにカノニカルなカイラル超場 \widetilde{W} を正則カイラル超場 W に変換することができる。

$$W_{\bar{a}} = M^{-1} \widetilde{W}_{\bar{a}} M \tag{3.144}$$

ゲージ群が $U(1)$ である場合には W と \widetilde{W} はどちらもゲージ不変なカイラル超場であり、区別する必要は無い。 $F_{m\bar{a}}$ に上のゲージ場を代入すれば、カイラル超場 W_L が次のようにプレポテンシャルを用いて与えられる。

$$W_{\bar{a}} = -\frac{i}{2} P_{\text{chiral}}(N^{-1} D_{\bar{a}} N) \stackrel{U(1)}{=} i P_{\text{chiral}} D_{\bar{a}} W \tag{3.145}$$

ただし

$$N = M^\dagger M = e^{-2V} \quad (3.146)$$

である。超場 V のベクトル成分と成分場 v_μ は異なることに注意すること。超場 V のベクトル成分 (v'_m とする) は $A_m|_{\theta=0} = v'_m$ によって超空間上のゲージ場と関係しているが、これは成分場 v_μ と次のように関係している。

$$v_\mu = A_\mu|_{\theta=0} = (E_\mu{}^m A_m + E_\mu{}^a A_a)|_{\theta=0} = e_\mu{}^m v'_m - i(\psi_\mu \gamma_5 \eta) \quad (3.147)$$

右辺の $A_a|_{\theta=0}$ はゲージに依存する量であり、超場 V の低次の項に依存する。従って、成分場として v_μ ではなく v_m を用いてしまうと、超対称変換が(あらわにゲージ固定を行わない限り)物理的な場の中で閉じない。以前に (3.124) で定義した量 $F_{mn}^{(s)}$ は、超空間上のゲージ場の場の強さを用いて定義された (3.142) と全く同じものであることが (3.145) および (3.138) を用いればわかる。

ゲージ多重項の成分場の変換則 (3.137) はプレポテンシャル V に対する超対称変換が、一般のスカラー超場の超対称変換 (3.122) と、Wess-Zumino ゲージを保つためのゲージ変換の組み合わせとして

$$\delta V = \xi DV + \delta_{\text{gauge}}(\Lambda)V. \quad (3.148)$$

のように与えられるとすれば再現することができる。ただし、ゲージ変換のパラメータ Λ_c は次の成分を持つカイラル超場である。

$$\begin{aligned} \Lambda_c|_{\theta=0} &= 0, \\ D_L \Lambda_c|_{\theta=0} &= -2i\gamma^m \xi_R v_m, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} \Lambda_c|_{\theta=0} &= -2i(\xi_R \lambda_R) + 2iv_k (\xi_R \gamma^m \gamma^k \psi_{mR}) \end{aligned} \quad (3.149)$$

ただし以前にも述べたように、ゲージ場 v_μ に対する変換則を (3.148) から再現するためには、それが (3.119) で定義される成分場 v_m そのものではなく、(3.147) のようなずれがあることに注意しなければならない。

3.8 超空間上の不変積分

超対称性が大域的な場合と同様に、超重力理論においても超空間上の積分を用いて超対称変換のもとで不変な作用を与えることができる。[29]

Φ を一般のスカラー超場とすれば、次の積分は超対称変換のもとで不変である。

$$S = \int d^4x \int d^4\theta E \Phi \quad (3.150)$$

ただし、 E は超空間上の積分測度であり、多脚場の超行列式として次のように定義される。[30]

$$E = \text{sdet } E_M^A. \quad (3.151)$$

超行列式は超トレースを用いた次の式によって定義される。

$$\log \text{sdet } X_{MN} = \text{str } \log(X_{MN}) \quad (3.152)$$

超トレースの定義は

$$\text{str } X_{MN} = X_{mm} - X_{\alpha\alpha} \quad (3.153)$$

である。すなわち、ボゾンの添え字を持つ部分に対するトレースからフェルミオンの添え字に対するトレースを引いたものとして定義される。このようにフェルミオン添え字の部分の符号を反転させて定義することにより、 $\text{str}(XY) = \text{str}(YX)$ という公式が成り立つ。

積分 (3.150) の不変性は以下のようにして示すことができる。座標変換のもとで多脚場とスカラー超場は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gc}}^0(\Xi) E_M^A &= \Xi^K T_{KM}^A + \partial_M(\Xi^K E_K^A), \\ \delta_{\text{gc}}^0(\Xi) \Phi &= \Xi^M \partial_M \Phi. \end{aligned} \quad (3.154)$$

一般の超行列式の変分に対して

$$\delta \text{sdet}(X_{MN}) = \text{sdet}(X_{MN}) \text{str}(X^{-1} \delta X) \quad (3.155)$$

が成り立つことを用いれば積分測度 E の座標変換 (3.154) のもとでの変分は次のように与えられる。

$$\delta E = (-)^M \partial_M (E \Xi^M) \quad (3.156)$$

従って、(3.150) の被積分関数の変換は $\delta(E\Phi) = (-)^M \partial_M (E \Xi^M \Phi)$ のように全微分になり、超空間上の積分として定義された作用 (3.150) は局所的超対称変換のもとで不変である。

このような積分の中では、余分な項を出すことなく共変微分についての部分積分を行うことができる。換率に対する拘束条件を必ずしも満足しない一般の超空間上の積分測度 E とベクトル超場 V^M について、次の式が成り立つ。

$$(-)^M \partial_M (E V^M) = (-)^A E D_A V^A + (-)^B E V^A T_{AB}^B \quad (3.157)$$

もし超空間が以前に与えた拘束条件を満足していれば、右辺の第 2 項は 0 になり、表面項を無視すれば次の式が成り立つ。

$$\int d^4 x d^4 \theta (-)^A E D_A V^A = 0. \quad (3.158)$$

従って、超空間上の共変微分について部分積分を実行することができる。これに対して、 x 空間上での同様の式

$$\partial_\mu(eV^\mu) = eD_m V^m + eV^m T_{mn}{}^n \quad (3.159)$$

の右辺第 2 項は一般に超空間上の拘束条件を課した場合であっても 0 ではない。(この式の右辺に現れている換率は超共変化されたものではないので、拘束条件が課されていても 0 ではないことに注意しよう。)従って、成分場を用いて x 空間上の積分として与えた作用に対しては部分積分の際に換率に比例する項が現れることに注意しなければならない。

$$\int d^4x e D_m V^m = \int d^4x e T_{nm}{}^n V^m \quad (3.160)$$

超空間全体にわたる積分 (3.151) は D 項作用を与える。これに対し、 F 項作用を与える積分も定義することができる。カイラル超場 Φ があるときに、次のものも超対称変換のもとで不変になる。

$$S = \int d^4x \int d^2\theta_L \mathcal{E} \Phi \quad (3.161)$$

\mathcal{E} はカイラル密度と呼ばれるものの一種で、次のように定義される。

$$\mathcal{E} = \text{sdet } E_{M'}{}^{A'}. \quad (3.162)$$

ただし、プライムのついた添え字はボゾン座標の部分と左巻きスピノルの部分のみを走る。例えば $A' = (m, \bar{a})$ である。

積分 (3.161) が実際に超対称変換のもとで不変であることを示しておこう。 \mathcal{E} に対して座標変換を行えば換率に対する拘束条件を用いて

$$\delta \mathcal{E} = (-)^{M'} \partial_{M'} (\mathcal{E} \Xi^{A'} \tilde{E}_{A'}{}^{M'}) \quad (3.163)$$

であることが示される。ただし $\tilde{E}_{A'}{}^{M'}$ は $E_{M'}{}^{A'}$ の逆行列であって $E_{M'}{}^{A'}$ の逆行列 $E_A{}^M$ の部分行列ではないことに注意。一般のカイラル超場の座標変換は $\delta \Phi = \Xi^{A'} \partial_{A'} \Phi$ であるので、

$$\delta(\mathcal{E} \Phi) = (-)^{M'} \partial_{M'} (\mathcal{E} \Xi^{A'} \tilde{E}_{A'}{}^{M'}) \Phi + \mathcal{E} \Xi^{A'} E_{A'}{}^M \partial_M \Phi \quad (3.164)$$

となる。この第 2 項は $D_R \Phi = 0$ より従う $\partial_{\underline{\alpha}} \Phi = -\tilde{E}_{\underline{\alpha}}{}^b E_{\underline{b}}{}^{M'} \partial_{M'} \Phi$ (ただし $\tilde{E}_{\underline{\alpha}}{}^b$ は $E_{\underline{a}}{}^{\underline{\beta}}$ の逆行列) を用いることで

$$E_{A'}{}^M \partial_M \Phi = (E_{A'}{}^{M'} - E_{A'}{}^\alpha \tilde{E}_{\underline{\alpha}}{}^b E_{\underline{b}}{}^{M'}) \partial_{M'} \Phi = \tilde{E}_{A'}{}^{M'} \partial_{M'} \Phi \quad (3.165)$$

のように変形できて、全体は次のように表面項になる。

$$\delta(\mathcal{E} \Phi) = (-)^{M'} \partial_{M'} (\mathcal{E} \Xi^{A'} \tilde{E}_{A'}{}^{M'} \Phi) \quad (3.166)$$

従って、(3.161) は超対称変換のもとで不変である。

以上で大域的超対称理論の場合と同様に超対称変換のもとで不変な二通りの積分が定義できた。次の目標は、これら二つの積分の関係性を導くことである。大域的な場合には、 D 項ラグランジアンと F 項ラグランジアンは次の関係にあった。

$$[V]_D = 2[P_{\text{chiral}}V]_F \quad (3.167)$$

あるいは、フェルミオン座標の積分を用いて書けば

$$\int d^4x d^4\theta V = \int d^4x d^2\theta_L P_{\text{chiral}}V \quad (3.168)$$

実は、超重力理論においても、積分測度 E および \mathcal{E} を挿入し、カイラル射影演算子としてカイラル超場 \mathcal{R} を含む (3.118) を用いておけば、全く同様の関係式が成り立つ。すなわち、

$$\int d^4x d^4\theta EV = \int d^4x d^2\theta_L \mathcal{E} P_{\text{chiral}}V \quad (3.169)$$

である。

これは以下のようにして導くことができる。まず、一般の座標系で上記の関係式を導くことは可能ではあるはずであるが、計算が煩雑になるので、 θ^α 座標に対して正規座標を取ることにする。(正規座標の取り方については、次の節で改めて詳しく説明する。)すると、超場 V は次のように展開することができる。

$$V(z^M) = V(z^{M'}, 0) + \theta^\alpha D_\alpha V(z^{M'}, 0) + \frac{1}{4} \theta_R^2 D_\alpha D^\alpha V(z^{M'}, 0) \quad (3.170)$$

ただし、右辺の V およびその微分は正規座標の原点 $\theta_R = 0$ における値である。座標 θ^α の添え字が局所直交系のものになっているのは、正規座標を用いているためである。一方、積分測度については、 θ_R に対する正規座標を用いると次の式が成り立つ。(この関係式も次の節で導く。)

$$E(z^M) = \mathcal{E}(z^{M'}, 0)(1 + \theta_R^2 \mathcal{R}(z^{M'}, 0)) \quad (3.171)$$

これらを組み合わせることにより、次の公式を得る。

$$\int d^4\theta EV = \int d^2\theta_L [EV]_{\theta_R^2} = \int d^2\theta_L \mathcal{E} \left(\frac{1}{4} D_\alpha D^\alpha + \mathcal{R} \right) V \quad (3.172)$$

これは (3.169) に他ならない。

関係式 (3.169) は D 項作用を F 項作用の形に書き換えるものであるが、 \mathcal{R} が 0 で無い場合には逆に F 項作用を D 項作用の形に書き換える次の公式もしばしば便利である。

$$\int d^2\theta \mathcal{E} f = \int d^4\theta \frac{E}{\mathcal{R}} f \quad (3.173)$$

ただし、 f は任意のカイラル超場である。

成分場で書かれたラグランジアンを得るには、 E 、または \mathcal{E} をフェルミオン座標で展開し、その成分場を求める必要がある。まず、カイラル積分については、次の展開式が成り立つ。

$$\int d^4x d^2\theta \mathcal{E} \Phi = \int d^4x e [F + (\psi_{Rm} \gamma^m \chi_L) + (3M^* + 2(\psi_{Rm} \gamma^{mn} \psi_{Rn})) \phi] \quad (3.174)$$

ただし (ϕ, χ, F) は Φ の成分場である。この式をどのようにして得るかは後ほど詳しく説明することとし、ここでは結果だけを与えておく。

D 項作用は、カイラル射影演算子 P_{chiral} を用いて

$$S = [V]_D^{\text{Poincare}} = 2 \int d^4\theta E V = 2 \int d^2\theta_L \mathcal{E} P_{\text{chiral}} V \quad (3.175)$$

と与えることができる。これを成分場によって表すには、 $P_{\text{chiral}} V$ の成分場が次のように与えられることと (3.174) を用いれば簡単である。

$$\begin{aligned} P_{\text{chiral}} X|_{\theta=0} &= C^* + MB, \\ D_L P_{\text{chiral}} X|_{\theta=0} &= -i\lambda_L + D^{(s)} \eta_R - \frac{i}{3} \chi_R + M \eta_L + \chi_L^{\mathcal{R}} B, \\ \frac{1}{4} D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} P_{\text{chiral}} X|_{\theta=0} &= \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} \left(D_m^{(s)} + \frac{4i}{3} c_m \right) \left(D^{(s)m} B - i v^m \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\chi_R^{\mathcal{R}} \eta_R) - 2M^* C^* + MC + F^{\mathcal{R}} B - \frac{1}{2} (\chi_L^{\mathcal{R}} \eta_L) \end{aligned} \quad (3.176)$$

これを用いて $[X]_D^{\text{Poincare}}$ を成分場によって展開すると以下ようになる。ただし、超共変微分を通常の共変微分を用いて展開し、部分積分を許して変形した。(部分積分を行う際には換率が存在することに注意すること。)

$$\begin{aligned} [X]_D^{\text{Poincare}} &= 2[P_{\text{chiral}} V]_F^{\text{Poincare}} \\ &= e \left[D + \frac{4}{3} c_m v^m + 2M^* C^* + 2MC \right. \\ &\quad + \left(-\frac{8}{9} c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3} R_{mn}{}^{mn} + \frac{2}{3} (\gamma_m \gamma^{mpq} \psi_{pq}) \right) B \\ &\quad + i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnp} \psi_p) v_n + i(\psi_m \gamma_5 \gamma^m \lambda) \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} (\psi_{mn} \gamma^{mn} \eta) - (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) (\psi_k \gamma_5 \eta) \right] \end{aligned} \quad (3.177)$$

$2[P_{\text{chiral}} V]_F$ という形は実であることが明らかな形をしていないが、部分積分を用いて変形することにより上に与えた明らかな実である形に変形することができる。これらの公式を用いて得られる具体的なラグランジアンについては節を改めて与えることにする。

3.9 正規座標

前に述べたように、積分測度 E や \mathcal{E} の θ 展開を求めるのは一般の座標系では計算が非常に煩雑になる。そこで、積分を行いたい座標について、正規座標を取っておくのが便利である。[31, 32] 以下ではまず、全ての座標がボゾンの場合について説明する。グラスマン数の座標が含まれる場合には、添え字の順序に依存した負号因子を付け加えればよいが、式が煩雑になるので、最終結果についてのみ、それらの負号を考慮した式を与えることにする。

正規座標は曲がった空間上において導入される最も「真っ直ぐな」座標系である。ある点 O を原点とする正規座標 y^M は点 O を通る測地線が、点 O からの測地距離に比例するパラメータ s を用いて

$$y^M(s) = n^M s \quad (3.178)$$

と与えられるようなものとして定義される。測地線の方程式

$$\frac{d^2 y^M}{ds^2} + \frac{dy^K}{ds} \Gamma_{KL}^M \frac{dy^L}{ds} = 0. \quad (3.179)$$

に (3.178) 代入すると、アフィン接続に対する次の式を得る。

$$n^K \Gamma_{KL}^M (s n^N) n^L = 0. \quad (3.180)$$

この式は正規座標を特徴付ける基本的な式である。スピン接続については、上記の測地線に沿ったスピン接続が 0 となるように選ぶことにする。すなわち、スピン接続は次の条件を満足する。

$$n^K \omega_K^A{}_B (s n^N) = 0. \quad (3.181)$$

正規座標を特徴づける二つの式 (3.180) と (3.181)、および多脚場仮説

$$\nabla_M E_N^A = 0 \quad (3.182)$$

を組み合わせることで、任意の座標での多脚場 E_N^A の正規座標 y^M によるテーラー展開の係数を曲率テンソルなどの共変量で与えることができる。

以下では部分的な正規座標というものを定義する。これは、座標変数の組を $z^M \rightarrow (x^\mu, y^\alpha)$ のように二つの組に分解し、 y^α についてのみ正規座標の条件を課すものである。これは (3.178) におけるベクトルを

$$n^M = (0, n^\alpha) \quad (3.183)$$

に限ることによって実現される。このとき (3.181) と (3.182) を s について展開し、各次数の係数を 0 と置くことにより次の式を得ることができる。

$$\partial_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \Gamma_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2}}^M \} \stackrel{0}{=} 0, \quad (3.184)$$

$$\partial_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \omega_{\alpha_{k+1}}^A{}_B \} \stackrel{0}{=} 0 \quad (3.185)$$

ただし、添え字の対称化は括弧の間に挟まれた全ての添え字について行う。等号の上の 0 は正規座標の原点において成り立つ式であることを意味している。

さて、上記の条件を用いて多脚場の成分の y 展開を求めよう。 y の 0 次の項は、ここまでで与えた条件からは決まらない。後に $E_\alpha^A = \delta_\alpha^A$ という条件を置くが、当面は固定しないことにする。

y の 1 次の項については、多脚場条件を用いて求めるが、その際に必要となる Γ や ω の原点での値を求めておこう。(3.184) について $k=0$ の場合に、これらは次の式を与える。

$$\Gamma_{\{\alpha\beta\}}^M \stackrel{0}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\alpha\beta}^M \stackrel{0}{=} \Gamma_{[\alpha\beta]}^M \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}^M \quad (3.186)$$

最後の掠率を用いた表式を得るために多脚場条件を用いた。下付き添え字に μ が含まれている場合については多脚場条件を用いることで

$$\Gamma_{\mu\alpha}^K e_K^A = D_\mu e_\alpha^A \quad (3.187)$$

が得られる。下付き添え字が二つとも μ であるものについてはそのままにしておく。まとめると

$$\Gamma_{\alpha\beta}^M \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}^M, \quad \Gamma_{\mu\alpha}^K e_K^A \stackrel{0}{=} D_\mu e_\alpha^A, \quad \Gamma_{\mu\nu}^M \quad (3.188)$$

次に ω についての式を得るために (3.185) で $k=0$ と置くと、

$$\omega_\alpha \stackrel{0}{=} 0 \quad (3.189)$$

ω_μ についてはそのままにしておく。

以上を踏まえて y の 1 次の項を求めよう。多脚場条件 $\nabla_\alpha E_M^A = 0$ を原点で評価することにより、次の式を得る。

$$\partial_\alpha E_\mu^A \stackrel{0}{=} \Gamma_{\alpha\mu}^K E_K^A \stackrel{0}{=} T_{\alpha\mu}^A + D_\mu E_\alpha^A \quad \partial_\alpha E_\beta^A \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}^A \quad (3.190)$$

一つ目の式は完全には共変な形にはなっていない。より見やすい形に書き換えるために E_μ^A の y について 1 次の部分を $E_\mu^{(1)A}$ とすれば、次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} dx^\mu E_\mu^{(1)A} &= dx^\mu y^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^K E_K^A \\ &= dx^\mu y^\alpha T_{\alpha\mu}^K E_K^A + dx^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^K y^\alpha E_K^A \\ &= dx^\mu y^\alpha T_{\alpha\mu}^K E_K^A + \nabla y^K E_K^A - dy^\alpha E_\alpha^A \end{aligned} \quad (3.191)$$

従って、 dy も y について 1 次と数える約束で $E^A = dx^\mu E_\mu^A + dy^\alpha E_\alpha^A$ の 1 次の部分を $E^{(1)A}$ と表すことにすると、これは次のように共変な形に書くことができる。

$$E^{(1)A} = dx^\mu E_\mu^{(1)A} + dy^\alpha E_\alpha^{(0)A} = dx^\mu y^\alpha T_{\alpha\mu}^A + \nabla y^K E_K^A \quad (3.192)$$

多脚場の二回微分を求めるためには、多脚場仮説の式を ∂_α 微分したものをいれればよいが、その中にアフィン接続やスピン接続の微分が現れるので、それらをどのよ

うに処理すればよいかを述べておこう。Γ の下付き添え字に μ が含まれる場合には、その ∂_α 微分は曲率の定義式を用いて次のように ∂_α 微分が頭に現れない形に変形することができる。

$$\partial_\alpha \Gamma_{\mu N}^M = R_{\alpha\mu}{}^M{}_N + \partial_\mu \Gamma_{\alpha N}^M + \Gamma_{\mu K}^M \Gamma_{\alpha N}^K - \Gamma_{\alpha K}^M \Gamma_{\mu N}^K \quad (3.193)$$

スピン接続についても同様である。

このことを踏まえて多脚場仮説の式を微分して得られる式

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta e_\mu^A &= \partial_\alpha (\Gamma_{\beta\mu}^K e_K^A - \omega_{\beta A}{}^B e_\mu^B) \\ &= (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^K) e_K^A + \Gamma_{\beta\mu}^K \partial_\alpha e_K^A - \partial_\alpha (\omega_{\beta A}{}^B e_\mu^B) \end{aligned} \quad (3.194)$$

を変形していこう。まず第1項目は

$$\begin{aligned} (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^K) e_K^A &= (\partial_\alpha T_{\beta\mu}^K) e_K^A + (\partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^K) e_K^A \\ &= D_\alpha T_{\beta\mu}^A - T_{\beta\mu}^\lambda T_{\alpha\lambda}^A - T_{\beta\mu}^\lambda D_\lambda e_\alpha^A - \frac{1}{2} T_{\beta\mu}^\gamma T_{\alpha\gamma}^A \\ &\quad + R_{\alpha\mu}{}^A{}_\beta + \frac{1}{2} (\partial_\mu T_{\alpha\beta}^K) e_K^A - (\Gamma_{\alpha L}^K \Gamma_{\mu\beta}^L) e_K^A + (\Gamma_{\mu L}^K \Gamma_{\alpha\beta}^L) e_K^A \end{aligned} \quad (3.195)$$

第2項目は

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\mu}^K \partial_\alpha e_K^A &= \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \partial_\alpha e_\lambda^A + \Gamma_{\beta\mu}^\gamma \partial_\alpha e_\gamma^A \\ &= \Gamma_{\beta\mu}^\lambda (T_{\alpha\lambda}^A + D_\lambda e_\alpha^A) + \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\mu}^\gamma T_{\alpha\gamma}^A \end{aligned} \quad (3.196)$$

第3項目は

$$\begin{aligned} -(\partial_\alpha \omega_{\beta A}{}^B) e_\mu^B &= -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta}{}^A{}_B e_\mu^B \\ &= \frac{1}{2} R_{\beta\mu}{}^A{}_\alpha - \frac{1}{2} R_{\alpha\mu}{}^A{}_\beta - \frac{1}{2} D_\alpha T_{\beta\mu}^A - \frac{1}{2} D_\beta T_{\mu\alpha}^A - \frac{1}{2} D_\mu T_{\alpha\beta}^A \end{aligned} \quad (3.197)$$

二行目へ行く際にビアンキ項等式を用いた。これらを全て足し合わせると次のようにまとまることになる。

$$\partial_\alpha \partial_\beta e_\mu^A = \frac{1}{2} R_{\beta\mu}{}^A{}_\alpha + \frac{1}{2} R_{\alpha\mu}{}^A{}_\beta - \frac{1}{2} D_\alpha T_{\mu\beta}^A - \frac{1}{2} D_\beta T_{\mu\alpha}^A \quad (3.198)$$

ここで、微分 D_α を完全な共変微分を用いて書き換えるために

$$D_{\{\alpha} T_{\mu\beta\}}^A = \nabla_{\{\alpha} T_{\mu\beta\}}^A + \Gamma_{\{\alpha\mu}^K T_{K\beta\}}^A \quad (3.199)$$

と書き換えよう。すると、

$$\begin{aligned} dx^\mu E_\mu^{(2)A} &= \frac{1}{2} y^\alpha y^\beta \partial_\alpha \partial_\beta e_\mu^A dx^\mu \\ &= \frac{1}{2} y^\alpha y^\beta R_{\alpha\mu}{}^A{}_\beta dx^\mu - \frac{1}{2} y^\alpha y^\beta \nabla_\alpha T_{\mu\beta}^A dx^\mu - \frac{1}{2} y^\alpha y^\beta \Gamma_{\alpha\mu}^K T_{K\beta}^A dx^\mu \end{aligned} \quad (3.200)$$

末尾の項は次のように書き換えることができる。

$$-\frac{1}{2}y^\alpha y^\beta T_{\alpha\mu}^K T_{K\beta}^A dx^\mu - \frac{1}{2}y^\beta (\nabla y^K - dy^K) T_{K\beta}^A \quad (3.201)$$

従って、(3.190) の二つ目の式と組み合わせることにより、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} E^{(2)A} &= \frac{1}{2}y^\alpha y^\beta \partial_\alpha \partial_\beta E_\mu^A dx^\mu + y^\alpha dy^\beta \partial_\alpha E_\beta^A \\ &= \frac{1}{2} [y^B E^C y^D (R_{BC}{}^A{}_D - \nabla_B T_{CD}^A) + y^B (y^D E^E T_{DE}^C + \nabla y^C) T_{BC}^A] \end{aligned} \quad (3.202)$$

ここまで述べたような方法を用いることで、 y 展開の高次の項まで計算していくことができる。この作業を機械的に行うには次の δ 演算を用いるのが便利である。

$$\begin{aligned} E^A &\xrightarrow{\delta} E^C y^B T_{BC}{}^A + Dy^A \\ Dy^A &\xrightarrow{\delta} -y^D E^C y^B R_{BCD}{}^A \\ y^A &\xrightarrow{\delta} 0 \\ X &\xrightarrow{\delta} y^A D_A X \end{aligned} \quad (3.203)$$

最後の式に出てくる X は、局所座標の添え字だけを持つ任意のテンソルである。この式では座標がグラスマン数を含む場合も考慮して添え字の順序を決めた。このように定義される δ 演算は y の次数を一つ上げる。 E^A から出発してこの操作を n 回行うことによって、 y の n 次の項を次のように得ることができる。

$$E^{(n)A} = \frac{1}{n!} \delta^n E^A \quad (3.204)$$

実際に、 $E^{(1)A}$ と $E^{(2)A}$ が上記のルールで与えられることはすぐに確かめられる。まだ計算していない $E_\alpha^{(2)A}$ について、上記のルールを用いて計算すれば、最終的に以下の式を得る。

$$E^A(y) = E^B F_B^A(y) + \nabla y^B G_B^A(y) \quad (3.205)$$

ただし、 F と G は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_B^A &= \delta_B^A + y^C T_{CB}{}^A \\ &\quad + \frac{1}{2}(-)^{BC} y^C y^D (-R_{DBC}{}^A - \nabla_D T_{BC}{}^A - T_{DB}{}^E T_{EC}{}^A) + \mathcal{O}(y^3), \end{aligned} \quad (3.206)$$

$$\begin{aligned} G_B^A &= \delta_B^A + \frac{1}{2}y^C T_{CB}{}^A \\ &\quad + \frac{1}{6}(-)^{BC} y^C y^D (-R_{DBC}{}^A - \nabla_D T_{BC}{}^A - T_{DB}{}^E T_{EC}{}^A) + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \quad (3.207)$$

(3.205) から多脚場の成分を読み取れば、 F と G を用いて次のように与えられることがわかる。

$$E_M^A(y) = \begin{pmatrix} E_\mu{}^m F_m^A(y) + E_\mu{}^a F_a^A(y) + (-)^{\alpha\mu} y^\alpha (D_\mu E_\alpha^B) G_B^A(y) \\ E_\alpha{}^B G_B^A(y) \end{pmatrix} \quad (3.208)$$

ここで、 E と \mathcal{E} の関係を求める問題を考えることにし、上で用いていた添え字 μ は x^μ と $\theta^{\bar{\alpha}}$ を、添え字 α は θ^α を表すことにしよう。このとき、 $E = \det(E_M^A(y))$ 、 $\mathcal{E} = \det(E_\mu^m)$ である。もし $E_{\bar{\alpha}}^A = \delta_{\bar{\alpha}}^A$ というゲージを取っていれば

$$E = \det \begin{pmatrix} E_{M'}^{B'} F_{B'}^A(y) + E_{M'}^{\bar{a}} F_{\bar{a}}^A(y) \\ G_{\bar{b}}^A(y) \end{pmatrix} \quad (3.209)$$

$F_B^A(y)$ と $G_{\bar{b}}^A(y)$ を具体的に計算してみると、

$$\begin{pmatrix} F_k^n & F_k^{\bar{a}} & F_k^a \\ F_{\bar{b}}^n & F_{\bar{b}}^{\bar{a}} & F_{\bar{b}}^a \\ F_{\underline{b}}^n & F_{\underline{b}}^{\bar{a}} & F_{\underline{b}}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_k^n (1 + \frac{1}{2}\theta_R^2 \mathcal{R}) & -\frac{1}{2}(\theta_R \gamma_k)^{\bar{a}} \mathcal{R} & * \\ 2(\theta_R \gamma^n)_{\bar{b}} & \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} (1 - \theta_R^2 \mathcal{R}) & * \\ 0 & 0 & \delta_{\underline{b}}^a (1 - \frac{3}{2}\theta_R^2 \mathcal{R}) \end{pmatrix} \quad (3.210)$$

$$\begin{pmatrix} G_{\bar{b}}^n & G_{\bar{b}}^{\bar{a}} & G_{\bar{b}}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{\bar{b}}^a (1 - \frac{1}{2}\theta_R^2 \mathcal{R}) \end{pmatrix} \quad (3.211)$$

$F_{\bar{b}}^{A'} = G_{\bar{b}}^{A'} = 0$ であることから、(3.209) の右辺の行列の一行目の第2項は行列式に寄与しないことがわかる。従って

$$E = \det \begin{pmatrix} E_{M'}^{B'} F_{B'}^A(y) \\ G_{\bar{b}}^A(y) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \det \begin{pmatrix} F_{B'}^A(y) \\ G_{\bar{b}}^A(y) \end{pmatrix} \quad (3.212)$$

あとは行列の成分を具体的に計算してその行列式を求めるだけである。行列式を求めたい行列は次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} F_k^A \\ F_{\bar{b}}^A \\ G_{\underline{b}}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_k^n (1 + \frac{1}{2}\theta_R^2 \mathcal{R}) & -\frac{1}{2}(\theta_R \gamma_k)^{\bar{a}} \mathcal{R} & * \\ 2(\theta_R \gamma^n)_{\bar{b}} & \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} (1 - \theta_R^2 \mathcal{R}) & * \\ 0 & 0 & \delta_{\underline{b}}^a (1 - \frac{1}{2}\theta_R^2 \mathcal{R}) \end{pmatrix} \quad (3.213)$$

この行列式は、上記の行列を単位行列の部分とそれ以外の部分 X に分け、公式

$$\text{sdet}(1 + X) = 1 + \text{str } X + \frac{1}{2}[(\text{str } X)^2 - \text{str } X^2] + \mathcal{O}(X^3) \quad (3.214)$$

を用いることによって簡単に求めることができる。その結果、

$$E = \mathcal{E}|_{\theta_R=0} (1 + \theta_R^2 \mathcal{R}) \quad (3.215)$$

が得られる。

一方、任意の超場 V に対して、正規座標における θ_R 展開は以下のように与えられる。

$$V = V|_{\theta_R=0} + \theta^{\bar{a}} D_{\bar{a}} V|_{\theta_R=0} + \frac{1}{4} \theta_R^2 D_{\bar{a}} D^{\bar{a}} V|_{\theta_R=0} \quad (3.216)$$

これらを組み合わせることにより、以前に与えた超空間全体の積分とカイラル超空間上の積分の関係が得られる。

3.10 カイラル密度

今度は、カイラル密度 \mathcal{E} を成分場を用いて書き下すことを考えよう。この場合も、カイラル超空間上の正規座標を用いるのが便利である。

正規座標においては、次のようにカイラル超場の成分場の定義における共変微分を通常の微分に置き換えることができる。

$$\begin{aligned}\phi &= \Phi|_{\theta=0}, \\ \chi_{\bar{a}} &= D_{\bar{a}}\Phi|_{\theta=0} = \partial_{\bar{a}}\Phi|_{\theta=0}, \\ F &= \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}\Phi|_{\theta=0} = \frac{1}{4}\partial_{\bar{a}}\partial^{\bar{a}}\Phi|_{\theta=0}\end{aligned}\quad (3.217)$$

このような正規座標における θ 座標はしばしば大文字の Θ を用いてあらわされる。(3.217) は、正規座標においてはカイラル超場が次のように展開されることを意味している。

$$\Phi = \phi + \Theta_L \chi_L + \Theta_L^2 F. \quad (3.218)$$

正規座標は、原点における座標の取り方が指定されれば空間（あるいは原点の周りの有限の領域）全体の座標が決定される。従って、超対称変換を行う際に、正規座標であるという条件を保つようなものに限定すると、変換パラメータ $\xi^{\bar{A}}$ の $\theta = 0$ の値を指定すれば、 θ についての高次の項まで一意的に決定される。

正規座標を保つような超対称変換のパラメータを $\eta^{M'}$ としよう。 $\eta^{M'}$ の具体的な表式は超空間上の多脚場やスピン接続に対して正規座標であるという条件を課すことから導いても良いが、カイラル超場の展開式 (3.218) と、カイラル多重項の成分場の超対称変換則 (3.128) から読み取るのが簡単である。カイラル超空間の座標を $Y^{M'} = (y^\mu, \Theta_L)$ によって表わそう。添え字 M' はボゾンの座標 4 つとフェルミオンの座標 2 つをラベルする。カイラル超場 Φ は Y の座標変換 $\delta Y = \eta$ のもとで次のように変換される。

$$\delta\Phi = \eta^{M'} \mathbf{D}_{M'}\Phi. \quad (3.219)$$

ただし、ここでの微分 \mathbf{D}_M は次のように y^μ による微分と Θ_L による微分を含む。

$$\mathbf{D}_M = \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \partial_{\bar{a}} = \frac{\partial}{\partial \Theta^{\bar{a}}} \right). \quad (3.220)$$

(3.219) が超対称変換則 (3.128) を与えるためには、 $\eta^{M'}$ は次のように与えられる必要がある。

$$\begin{aligned}\eta^\mu &= 2(\Theta_L \gamma^\mu \xi_R) - 2\Theta_L^2 (\xi_R \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu R}) \\ \eta_L &= \xi_L - \eta^\mu \psi_{\mu L} + \Theta_L^2 \left[\omega_\mu \gamma^\mu \xi_R - \frac{i}{3} \mathbb{V} \xi_R - \mathcal{R}^* \xi_L \right]\end{aligned}\quad (3.221)$$

ただし、 $\omega_\mu = (1/4)\omega_{\mu mn}\gamma^{mn}$ は x 空間上のスピン接続である。 η_L がスピン接続 ω をあらわに含むから、局所ローレンツ回転の共変性が明白には存在していないが、超対称変換が (3.219) のように単純な微分を用いて書かれるということは超対称不変な作用を構成する際には大きな利点である。

この局所的超対称性変換のもとで不変な積分が次のように与えられるとしよう。

$$S = \int d^6 Y \Delta \quad (3.222)$$

上記の作用が不変であるためには、 Δ は次のように変換される必要がある。

$$\delta\Delta = (-)^{M'} \partial_{M'}(\eta^{M'} \Delta) \quad (3.223)$$

一般に、このような変換則を満足する超場をカイラル密度と呼ぶ。カイラル密度にカイラル超場を掛けたものも同じくカイラル密度になることはすぐに確かめられる。

カイラル密度 Δ の成分場 (a, ρ_L, f) を次のように定義する。

$$\Delta = a + \Theta_L \rho_L + \Theta_L^2 f \quad (3.224)$$

成分場の変換則を (3.223) から読み取れば

$$\begin{aligned} \delta a &= \xi_L \rho_L + 2(\xi_R \gamma^\mu \psi_{\mu L}) a, \\ \delta \rho_L &= 2D_\mu(\gamma^\mu \xi_R a) + 2\xi_L f + 2(\rho_L \gamma^\mu \xi_R) \psi_{\mu L} \\ &\quad + 2a \left(-\frac{i}{3} \chi \xi_R - \mathcal{R}^* \xi_L + 2(\xi_R \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu R}) \psi_{\mu L} \right) \end{aligned} \quad (3.225)$$

となる。 $\delta\rho_L$ の第1項の微分はスピン接続のみを含む共変微分である。

前節で定義した \mathcal{E} は初項として $a = e$ を持つカイラル密度として定義することができる。このカイラル密度のそのほかの成分場は変換則を比較することにより決定することができる。まず $\delta e = 2e(\xi \gamma^\mu \psi_\mu)$ と δa を比較することで ρ_L が決まり、 $\delta\rho_L$ の比較により f が決まる。

$$\begin{aligned} a &= e, \\ \rho_L &= 2e\gamma^\mu \psi_{\mu R}, \\ f &= 3eM^* + 2e(\psi_{\mu R} \gamma^{\mu\nu} \psi_{\nu R}) \end{aligned} \quad (3.226)$$

f を決める際には (3.226) の第二式の両辺の超対称変換のうち ξ_L を含む項の比較を行うだけでよい。 ξ_R を含む項は f とは関係なく両辺で等しくなるが、このことを示すためには多脚場の微分について次の関係式を用いる必要があることを注意しておこう。

$$D_\mu(ee_m^\mu) = ee_m^\mu e_\lambda^\lambda (D_\mu e_\lambda^k - D_\lambda e_\mu^k) = eT_{mk}^k = 2e(\psi_m \gamma^k \psi_k) \quad (3.227)$$

既に述べたように、カイラル密度にカイラル超場を掛けたものは再びカイラル密度になる。従って、電荷を持たない任意のカイラル超場 Φ を用いて超対称変換のもとで不変な作用を以下のように与えることができる。

$$\begin{aligned} S &= [\Phi]_F^{\text{Poincare}} = \int d^2\theta \mathcal{E} \Phi \\ &= e [F - (\chi_L \gamma^\mu \psi_{\mu R}) + \{3M^* + 2(\psi_{\mu R} \gamma^{\mu\nu} \psi_{\nu R})\} \phi] \end{aligned} \quad (3.228)$$

これが超重力理論における F 項作用である。大域的な超対称性の場合とは異なり、カイラル超場 Φ の F 成分だけではなくそのほかの成分も作用の中に現れている。

3.11 超重力理論の作用の例 (1)

超場の成分場を与える公式や、超空間上の積分を成分場を用いて与える公式を組み合わせれば、超空間上の積分として与えられた作用を成分場を用いて書き下すことは簡単である。ここではいくつかの例を与えておこう。

3.11.1 単純超重力理論

まず、物質場を含まない、重力多重項のみを用いて与えられる作用を書いてみよう。一つは、定数を超空間全体で積分することで得られる次の作用である。[29]

$$\begin{aligned} S_{\text{sugra}} &= -\frac{3}{k^2} [1]_D^{\text{Poincare}} = -\frac{6}{k^2} [\mathcal{R}]_F^{\text{Poincare}} \\ &= -\frac{6}{k^2} \int d^4x \int d^4\theta E = -\frac{6}{k^2} \text{Re} \int d^4x \int d^2\theta \mathcal{E} \mathcal{R} \\ &= \int d^4x \frac{e}{k^2} \left[R - 4(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho) - 6M^* M + \frac{8}{3} c_m c^m \right], \end{aligned} \quad (3.229)$$

これは以前に与えた単純超重力理論の作用に他ならない。

もう一つは、カイラル超空間上で定数を積分することによって得られる次の作用である。

$$\begin{aligned} S_m &= \text{Re} \int d^4x d^2\theta \mathcal{E} \left(-\frac{4m_{3/2}}{k^2} \right) \\ &= \int d^4x \frac{e}{k^2} [-6m_{3/2} M^* - 4m_{3/2} (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) + \text{c.c.}] \end{aligned} \quad (3.230)$$

これはグラビティーノ質量項を与える。

3.11.2 カイラル多重項と重力の結合

次に、物質場を導入してみよう。重力に結合したカイラル多重項の運動項は、大域的な場合の作用からの類推によって、 $(1/2)[\Phi\Phi^*]_D$ と取れば良い。あるいは、一般のケーラーポテンシャル K に対しては $(1/2)[K]_D$ と与えればよい。単純超重力理論の作用とあわせれば

$$S_{\text{sugra}} + S_{\text{chiral}} = -\frac{3}{k^2} \left[1 - \frac{k^2}{6} K \right]_D^{\text{Poincare}} \quad (3.231)$$

となる。このように、カイラル多重項の運動項と超重力理論の運動項はどちらも D-項ラグランジアンとして与えることができる。そこでこれら両方を含むものとして \mathcal{K} を次のように定義しておくことにする。

$$\mathcal{K} = -\frac{6}{k^2} + K + \mathcal{O}(k^2) \quad (3.232)$$

$\mathcal{O}(k^2)$ の部分は平坦極限を取った際に消える高次項である。大域的な超対称理論が与えられたときに、この部分をどのように選ぶかには任意性があるが、次のように選ぶのが便利である。

$$\mathcal{K} = -\frac{6}{k^2} \exp\left(-\frac{k^2}{6} K\right) \quad (3.233)$$

これを用いれば、重力多重項の運動項も含めたカイラル多重項の運動項作用は次のように与えられる。

$$S = \frac{1}{2} [\mathcal{K}]_D^{\text{Poincare}} = \int d^4x d^4\theta EK = -\frac{6}{k^2} \int d^4x d^4\theta EK \exp\left(-\frac{k^2}{6} K\right) \quad (3.234)$$

これを成分場で表してみよう。計算を簡単にするためにフェルミオンについては無視することにすれば、上記の作用は以下のボゾンの運動項 S_{kin} と補助場を含む項 S_{aux} との和として与えられる。

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \int d^4x \frac{e}{k^2} e^{-k^2 K/6} \left[R + \frac{1}{6} (k^2 K_i \partial^\mu \phi^i + 4ic^\mu) (k^2 K_{\bar{j}} \partial_\mu \phi^{*\bar{j}} - 4ic_\mu) \right. \\ &\quad \left. - k^2 K_{i\bar{j}} (\partial^\mu \phi^i) (\partial_\mu \phi^{*\bar{j}}) \right], \\ S_{\text{aux}} &= \int d^4x \frac{e}{k^2} e^{-K/6} \left[k^2 K_{i\bar{j}} F^i F^{*\bar{j}} - \frac{1}{6} (6M - k^2 F^{*\bar{j}} K_{\bar{j}}) (6M^* - k^2 F^i K_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.235)$$

ただし、 $K_i = \partial K / \partial \phi^i$ のように、添え字を用いてスカラー場による微分を表すことにする。上記の作用に加えて、さらに超ポテンシャル項を次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} S_{\text{pot}} &= -2 \text{Re}[W(\Phi)]_F^{\text{Poincare}} = -2 \text{Re} \int x^4 x d^2\theta_L W(\Phi) \\ &= \int d^4x (-eW_i F^i - 3eM^* W) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.236)$$

補助場についての運動方程式を解けば次の作用が得られる。

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \int d^4x e e^{-k^2 K/6} \left[\frac{1}{k^2} R + \frac{k^2}{24} (\partial^\mu K)(\partial_\mu K) - K_{i\bar{j}} (\partial^\mu \phi^i)(\partial_\mu \phi^{*\bar{j}}) \right], \\ S_{\text{aux}} + S_{\text{pot}} &= \int d^4x e e^{k^2 K/6} \left[-K^{i\bar{j}} \left| W_i + \frac{k^2}{2} K_i W \right|^2 + \frac{3k^2}{2} |W|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.237)$$

こうしてラグランジアンが得られたが、アインシュタイン作用やスカラー場の運動項の前に $e^{-k^2 K/6}$ という因子があり、気持ちが悪い。そこで、これらの運動項をカノニカルにするために次のワイル変換を行おう。

$$g_{\mu\nu} = e^{k^2 K/6} g_{\mu\nu}^{\text{new}} \quad (3.238)$$

このワイル変換の結果、作用は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \int d^4x \left[\frac{e}{k^2} R - e K_{i\bar{j}} (\partial^\mu \phi^i)(\partial_\mu \phi^{*\bar{j}}) \right], \\ S_{\text{aux}} + S_{\text{pot}} &= \int d^4x \left[-e e^{k^2 K/2} \left(K^{i\bar{j}} \left| W_i + \frac{k^2}{2} K_i W \right|^2 - \frac{3k^2}{2} |W|^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.239)$$

これは §2.1 で得られたラグランジアンของボゾン部分に一致している。

このようなワイル変換をフェルミオンを含む項まで含めて完全に実行することはかなり面倒な作業である。このような手間を省くためには、後で述べる $U(1)_K$ superspace formalism[33, 34, 35] を用いればよい。

3.11.3 ゲージ場の運動項と重力の結合

F 項作用の公式 (3.174) に (3.140) を代入することにより、次の作用を得る。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta \mathcal{E} W^{\bar{a}} W_{\bar{a}} \\ &= \int d^4x e \left[-\frac{1}{2} F_{mn}^{(s)(+)} F^{(s)(+)mn} - (\lambda_L \mathcal{Q}^{(s)} \lambda_R) + \frac{1}{2} D^2 - i(\lambda_L \not{\epsilon} \lambda_R) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} F_{mn}^{(s)} (\psi_{Rk} \gamma^k \gamma^{mn} \lambda_L) - i(\psi_{Rm} \gamma^m \lambda_L) D \\ &\quad \left. - (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \psi_{Rn}) (\lambda_L \lambda_L) \right] \end{aligned} \quad (3.240)$$

ゲージ群は任意でよいが、ゲージ群の添え字については省略しておく。この段階で、補助場 M^* を含む項が相殺していることがわかる。これは、この系が共形対称性を持っているためである。(後に説明する超共形対称性から出発する超重力理論の構成法では、共形対称性を破るために M を含む幾つかの場 (補正場) を導入する。) 上記の作用はこのままでは実であることが明らかではないが、(3.142) に与えた $\mathcal{Q}_m^{(s)} \lambda$ お

よび $F_{mn}^{(s)}$ の具体的表式を代入し、フェルミオン運動項について部分積分を行うことにより、次のように実であることが明らかな形に変形することができる。

$$S = \int d^4x e \left[-\frac{1}{2}(\lambda \not{\partial} \lambda) - \frac{i}{2}(\lambda \gamma_5 \not{\partial} \lambda) - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}F_{mn}(\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) \right] + S_{4\text{-fermi}} \quad (3.241)$$

ここでは FI 項の導入は行わなかった。ローレンツ超空間を用いた超重力理論においては、FI 項をプレポテンシャルの D 項として $[V]_D$ のように与えることはできないことに注意しよう。大域的な超対称性の場合とは異なり、このような項はゲージ不変ではない。超場形式を用いて FI パラメータを導入する方法についてはあとで議論する。

3.12 超空間の変形と運動方程式

前節で見たように、超場形式での作用の一般形は次のように与えられる。

$$S = \int d^4x \int d^4\theta E \left[\mathcal{K} - 2 \operatorname{Re} \frac{W}{\mathcal{R}} \right] \quad (3.242)$$

W は長ポテンシャルであり、 \mathcal{K} はケーラーポテンシャル K と (3.233) によって関係している。

§3.8 で与えた幾つかの作用が、実際に超重力理論やカイラル超場の作用を与えているということを確認するために、それらから運動方程式を求めることを考えよう。ここでは特に、重力場の方程式に相当するものを超場形式で導くことを考える。そのためには、超空間上の積分として与えられた作用の、超空間上の多脚場による変分を求める必要がある。その際に、換率に対して課された拘束条件を破らないような変分のみを考える必要がある。超空間上の多脚場の変分を表す超場として H_B^A を次のように定義する。

$$\delta E_M^A = E_M^B H_B^A \quad (3.243)$$

また、スピン接続の変分で添え字を全て直交座標のものにしたものを次のように定義する。

$$\delta \Omega_{Amn} = E_A^M \delta \Omega_{Mmn} \quad (3.244)$$

変分を取ることと添え字を変換することの順序に注意すること。これらの変分は、換率に次の変化をもたらす。

$$\begin{aligned} \delta T_{AB}^C &= T_{AB}^D H_D^C \\ &+ \left[D_A H_B^C - \delta \Omega_{AB}^C - H_A^D T_{DB}^C - (-)^{AB} [A \leftrightarrow B] \right] \end{aligned} \quad (3.245)$$

拘束条件を破らないような変分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} H_B^A &= H_B'^A + D_B \Xi^A + \Xi^C T_{CB}^A + \Sigma^A_B, \\ \delta\Omega_{Amn} &= \delta\Omega'_{Amn} + \Xi^B R_{BAmn} + D_A \Sigma_{mn} \end{aligned} \quad (3.246)$$

Ξ^A と Σ_{mn} は超空間上の一般座標変換と局所ローレンツ変換に対応する部分であり、それ以外の変形の自由度 H' と $\delta\Omega'$ は以下のように与えられる。($H_{n\bar{c}}$ に含まれる $\delta\Omega'$ には下で与える式を代入する。)

$$\begin{aligned} H'_{\bar{a}\bar{c}} &= \frac{i}{2} \mathcal{R}^* L^k (\gamma_k)_{\bar{a}\bar{c}}, \\ H'_{\bar{a}}^p &= i D_{\bar{a}} L^p \\ H'_{\bar{a}\bar{b}} &= -h C_{\bar{a}\bar{b}}, \\ H'_{n\bar{c}} &= -\frac{i}{8} (\gamma_n)^{\bar{a}\bar{b}} D_{\bar{a}} [L_{\bar{b}\bar{c}} \mathcal{R}] - \frac{i}{8} (\gamma_n)^{\bar{a}\bar{b}} (D_{\bar{a}} L_{\bar{b}\bar{c}}) \mathcal{R} \\ &\quad - \frac{1}{4} (\gamma_n)_{\bar{c}}^{\bar{b}} D_{\bar{b}} h - \frac{1}{4} (\gamma_n)^{\bar{a}\bar{b}} \delta\Omega'_{\bar{b}\bar{a}\bar{c}} - \frac{1}{8} (D_{\bar{b}} L^k) (\gamma_n \gamma_k \mathbb{V} + \frac{1}{3} \gamma_n \mathbb{V} \gamma_k)_{\bar{c}}^{\bar{b}}, \\ H_k^p &= -L_k^p - (h + h^*) \delta_k^p. \end{aligned} \quad (3.247)$$

$\delta\Omega'$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta\Omega'_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} &= -D_{\bar{b}} h C_{\bar{a}\bar{c}} - D_{\bar{c}} h C_{\bar{a}\bar{b}} \\ &\quad + \frac{1}{3} (D_{\bar{a}} L^k) V^l (\gamma_{kl})_{\bar{b}\bar{c}} + \frac{2}{3} (D_{\bar{b}} L^k) V_k C_{\bar{a}\bar{c}} + \frac{2}{3} (D_{\bar{c}} L^k) V_k C_{\bar{a}\bar{b}}, \\ \delta\Omega'^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} &= \frac{1}{3} (\gamma_{pl})^{\bar{b}\bar{c}} (D^{\bar{a}} L^l) V^p - \frac{i}{2} D^{\bar{a}} D_{\bar{a}} \bar{D}^{\{\bar{b}} L^p (\gamma^p)^{\bar{c}\bar{d}} \\ &\quad - 2i (\gamma_l)^{\bar{a}\bar{b}} \left(T_{lp}^{1,4} + T_{lp}^{3,2} - T_{lp}^{1,2} \right)^{\bar{c}\bar{d}} L^p, \\ \delta\Omega'_{pmn} &= \frac{1}{2} (-T_{mn}^a H_a^p + T_{mp}^a H_a^m + T_{nm}^a H_a^n) \\ &\quad - D_m H'_{\{np\}} + D_n H'_{\{mp\}} + D_p H'_{\{mn\}}. \end{aligned} \quad (3.248)$$

Ω'_{pmn} の式は H' で書かれているので、上で与えた式を代入すればよい。

これらは全て実ベクトル超場 L_k と複素スカラー超場 h を用いて与えられている。 L_{km} は次のように定義される。

$$[D_{\bar{a}}, D_{\bar{a}}] L_m = 2i (\gamma^k)_{\bar{a}\bar{b}} L_{km} \quad (3.249)$$

複素スカラー超場 h はカイラル超場 U と実ベクトル超場 L_k を用いて次のように与えられる。

$$h = -\frac{1}{6} U + \frac{1}{3} U^* - \frac{1}{6} L_k^k - \frac{i}{2} D_k L^k + \frac{2}{9} L^k V_k \quad (3.250)$$

以上のことより、独立な場は、ゲージ自由度も含めて

$$U, L^k, \Xi^k, \Xi^a, \Sigma_{ab} \quad (3.251)$$

であり、それ以外の場は全て拘束条件を用いることでこれらを用いて書くことができる。

得られた多脚場の変分を用いて、超空間上の作用積分から運動方程式を導いてみよう。運動方程式を得るためには積分測度 E の変分が必要である。これは次のように与えることができる。

$$\frac{\delta E}{E} = (-)^A H_A^A = -\frac{1}{3} \left(L_k^k + U + U^* + \frac{8}{3} L^k V_k \right) + D_p \Xi^p - D_a \Xi^a \quad (3.252)$$

運動方程式を得るために行うべき変分はこれだけではない。作用が物質場としてカイラル超場を含む場合、カイラル超場に課されているカイラル条件

$$E_{\underline{a}}^M \partial_M \Phi = 0 \quad (3.253)$$

が背景の計量に依存していることに注意しなければならない。そのため、背景の計量を変化させた際には Φ も変化させる必要がある。カイラル条件がそのまま保たれるためには Φ の変分に対して次の条件が成り立つ必要がある。

$$D_{\underline{a}}(iL^m D_m \Phi + \delta \Phi) = 0 \quad (3.254)$$

これは次のように解くことができる。

$$\delta \Phi = -iL^m D_m \Phi + \text{chiral part} \quad (3.255)$$

右辺第2項は任意のカイラル超場を表す。この部分による作用の変分は、カイラル超場の運動方程式を用いれば0になるのでここでは無視することにする。積分測度 E の変分 (3.252) とカイラル超場の変分 (3.255) を考慮すると、作用 (3.242) の運動項の変分は次のように与えられる。

$$\delta S_{\text{kin}} = 2 \int E \left[L^m \left(\mathcal{J}_m - \frac{4}{9} V_m \mathcal{K} \right) - \frac{1}{6} (U P_{\text{chiral}} \mathcal{K} + \text{c.c.}) \right] \quad (3.256)$$

表面項は無視した。ただし、 \mathcal{J}_m は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_m &= -\frac{i}{12} (\gamma_m)^{\bar{a}b} (D_{\underline{a}} \Phi^i) (D_{\underline{b}} \Phi^{*\bar{j}}) \mathcal{K}_{i\bar{j}} - \frac{i}{3} (D_m \Phi^i) \mathcal{K}_i + \frac{i}{3} (D_m \Phi^{*\bar{i}}) \mathcal{K}_{\bar{i}} \\ &= J_m + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned} \quad (3.257)$$

これは大域的超対称理論において以前に定義した超カレント J_μ (1.236) の超重力理論版である。

超ポテンシャル項についても同様の変分をとってみよう。そのためには \mathcal{R} の変分を知る必要がある。 \mathcal{R} は換率テンソル $T_{m\underline{a}}^{\bar{b}}$ に含まれているから、このテンソルの変分を (3.245) に従って多脚場およびスピン接続の変分を用いて表し、その式に前節で得られた結果を代入すれば得ることができる。

$$\delta \mathcal{R} = -iL^m D_m \mathcal{R} + P_{\text{chiral}} \left(\frac{2}{3} U - \frac{1}{3} U^* + \frac{1}{6} L_m^m + \frac{i}{2} D_m L^m - \frac{8}{9} L^m V_m \right) \quad (3.258)$$

\mathcal{R} はカイラル超場であるから、この形は、一般のカイラル超場の変分の形 (3.255) に合致している。これを用いると、 S_{pot} の変分が次のように与えられる。次の式が得られる。

$$\delta S_{\text{pot}} = \int d^4\theta E \frac{UW}{\mathcal{R}} + \text{c.c.} = \int d^4\theta EUW + \text{c.c.} \quad (3.259)$$

ただし、カイラル超場 U を拘束条件なしの超場 \mathcal{U} を用いて $U = P_{\text{chiral}}\mathcal{U}$ と表した。表面項は無視した。

$\delta S_{\text{kin}} + \delta S_{\text{pot}} = 0$ より L_k および \mathcal{U} に対する運動方程式を次のように読み取ることができる。

$$\mathcal{J}_k - \frac{4}{9}V_k\mathcal{K} = 0 \quad (3.260)$$

$$P_{\text{chiral}}\mathcal{K} = 3W. \quad (3.261)$$

平坦極限を再現するには、 \mathcal{K} に (3.232) を、 \mathcal{J}_m に (3.257) を代入し、 k について高次の項を無視すればよい。その際重力多重項の超場 V_m や \mathcal{R} については k^2 程度の大きさだとみなす。このような近似により、次の運動方程式が得られる。

$$V_m = -\frac{3k^2}{8}J_m. \quad (3.262)$$

$$\mathcal{R} = k^2 \left(\frac{1}{24}D_{\underline{a}}D^{\underline{a}}K - \frac{1}{2}W \right) = -\frac{ik^2}{2}N \quad (3.263)$$

従って、 (J_μ, N) がエネルギー-運動量テンソルの超対称化とみなすことができるのと同様の意味で、 (V_μ, \mathcal{R}) をアインシュタインテンソルの超対称化とみなすことができる。 \mathcal{R} と V_m はビアンキ項等式から導かれる次の関係式を満足する。

$$\gamma^m D_R V_m = -\frac{3i}{4}D_L \mathcal{R} \quad (3.264)$$

これは、 (J_μ, K) が満足する式 (1.247) とちょうど対応している。

これらの式の幾つかの成分について見ておこう。まず、(3.262) の初項からはベクトル補助場に対する次の式が得られる。

$$c_m = -\frac{3k^2}{8}J_m|_{\theta=0} = \frac{ik^2}{8}(K_i\partial_m\Phi^i - K_{\bar{i}}\partial_m\Phi^{*\bar{i}}) + \text{fermion} \quad (3.265)$$

これは、ケーラー接続に他ならない。

次に (3.262) の $\theta\bar{\theta}$ 成分をみてみよう。超場 V_m のベクトル成分を初項にもつ超場は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V_{nm} &= \frac{i}{4}(\gamma_n)^{\bar{a}b}[D_{\bar{a}}, D_b]V_m|_{\theta=0} \\ &= \left[-\frac{3}{8}\text{tr}(\gamma^p\gamma_n DT_{pm}) + \frac{1}{16}\text{tr}(\gamma^{kl}\gamma_m\gamma_n DT_{kl}) \right]_{\theta=0} \\ &= -\frac{3}{4}\left(G_{mn} - \frac{1}{3}\eta_{mn}G \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.266)$$

ただし二行目に現れる DT_{mn} は $(DT_{mn})_a{}^b = D_a T_{mn}{}^b$ のようにスピノル添え字を二つ持つ行列であると解釈する。 G_{mn} はアインシュタインテンソル $G_{mn} = R_{mn} - (1/2)\eta_{mn}R$ 、 G はそのトレースである。一方超カレントのベクトル成分はエネルギー運動量テンソルを

$$J_{nm} = T_{nm} - \frac{1}{3}\eta_{nm}T_k{}^k + \dots \quad (3.267)$$

のように含む。これらより、(3.262) の $\theta\bar{\theta}$ 成分は次のアインシュタイン方程式を与える。

$$-\frac{2}{k^2}G_{mn} + T_{mn} + \dots = 0 \quad (3.268)$$

作用についても見ておこう。 L_m のベクトル成分が

$$L_{nm} = -(h_{nm} - \eta_{mn}h_k{}^k) + \dots \quad (3.269)$$

(ここでは L 以外の変分成分は無視する。 h_{mn} は $\delta e_\mu^m = e_\mu^n h_n{}^m$ のように定義される、平坦計量からの微小なずれを表す対称テンソルである。) のように与えられることを用いれば、 δS_{kin} が

$$\delta S = \left[\frac{8}{3k^2}L_m V^m + L_m J^m \right]_D = -\frac{2}{k^2}h_{nm}G^{nm} + h_{nm}T^{nm} + \dots \quad (3.270)$$

のように、線形化されたレベルでの物質場と重力場の結合を与えていることがわかる。

3.13 超ワイル変換

計量、あるいは多脚場をスカラー関数倍する変換はワイル変換と呼ばれる。これを超空間へ拡張しよう。一般に、超空間上の多脚場 $E_M{}^A$ に対して超空間上の任意の実スカラー関数 Φ を用いて $E'_M{}^A = \Phi E_M{}^A$ のような変換を行うと、拘束条件を破る。つまり、 $E_M{}^A$ が拘束条件を満足していたとしても $E'_M{}^A$ は拘束条件を満足しない。このことは、対応する無限小変換に対応する変分が前節で求めた拘束条件を満足する変分の中に含まれないことからわかる。

x^μ 座標に対する多脚場 $E_\mu{}^m$ に対してワイル変換を与え、拘束条件を破らないような変換は、カイラル超場 U による変換として与えることができる。上で与えた変

分の式から U および U^* を含む部分だけを抜き出すと以下ようになる。

$$\begin{aligned}
H_{\bar{a}\bar{b}} &= 0 \\
H_{\bar{a}^p} &= 0 \\
H_{\bar{a}^{\bar{b}}} &= C_{\bar{a}^{\bar{b}}} \left(\frac{1}{6}U - \frac{1}{3}U^* \right) \\
H_{n\bar{c}} &= -\frac{1}{12}(\gamma_n)_{\bar{c}^{\bar{b}}} D_{\bar{b}} U^* \\
H_k^p &= -\frac{1}{6}(U + U^*)\delta_k^p, \tag{3.271}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_U \Omega_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} &= \frac{1}{6}C_{\bar{a}\bar{c}} D_{\bar{b}} U + \frac{1}{6}C_{\bar{a}\bar{b}} D_{\bar{c}} U \\
\delta_U \Omega^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} &= 0 \\
\delta_U \Omega_{pmn} &= \frac{1}{6}\eta_{mp} D_m (U + U^*) - \frac{1}{6}\eta_{mp} D_n (U + U^*) \tag{3.272}
\end{aligned}$$

この変換は計量のスケールを変化させるワイル変換に相当するものである。超空間上では換率に対する拘束条件のために、ワイル変換のパラメータはカイラル超場に制限される。拘束されていない換率の変分を計算することにより、次の変換を得ることができる。

$$\begin{aligned}
\delta_U \mathcal{R} &= \frac{2}{3}\mathcal{R}U - \frac{1}{3} \left(\mathcal{R} + \frac{1}{4}D_{\underline{a}}D^{\underline{a}} \right) U^* \\
\delta_U V_m &= \frac{1}{6}(U + U^*)V_m - \frac{i}{4}D_m(U - U^*). \tag{3.273}
\end{aligned}$$

重力多重項の成分場は次のように変換される。

$$\begin{aligned}
\delta_U e_{\mu}^m &= -\frac{1}{6}(u + u^*)e_{\mu}^m, \\
\delta_U \psi_{L\mu} &= \frac{1}{6}(u - 2u^*)\psi_{L\mu} - \frac{1}{12}e_{\mu}^m \gamma_m \chi_U, \\
\delta_U c_{\mu} &= -\frac{i}{4}D_{\mu}^{(s)}(u - u^*), \\
\delta_U M &= \frac{2}{3}uM - \frac{1}{3}u^*M - \frac{1}{3}F_U^*. \tag{3.274}
\end{aligned}$$

ただしカイラル多重項 U の成分場を (u, χ_U, F_U) とする。ベクトル場については c_m ではなく $c_{\mu} = e_{\mu}^m c_m$ の変換則を与えた。

超空間上の積分測度については

$$\begin{aligned}
\delta_U E &= -\frac{1}{3}(U + U^*)E, \\
\delta_U \mathcal{E} &= -U\mathcal{E}. \tag{3.275}
\end{aligned}$$

すなわち、D 項作用および F 項作用に対しては

$$\begin{aligned}
\delta_U [V]_D^{\text{Poincare}} &= -\frac{1}{3}[(U + U^*)V]_D^{\text{Poincare}}, \\
\delta_U [\Phi]_F^{\text{Poincare}} &= -[U\Phi]_F^{\text{Poincare}}. \tag{3.276}
\end{aligned}$$

多脚場に対する変形を行った場合、一般にはカイラル超場についても (3.255) に与えられているようにカイラル条件を保つための変形を行う必要がある。しかしここで考えている超ワイル変換については (3.255) が L^m のみを含んでおり U に依存していないことからその必要はない。必要は無いが、一般にはカイラル超場は 0 でないウェイトを持つことができ、そのウェイトに従って変換される。

ウェイトが 0 である場合にはカイラル超場 Φ は超ワイル変換のもとで不変である。そうであっても、成分場を定義する際に用いる共変微分が不変ではないため、初項以外は非自明に変換されることに注意しよう。

$$\begin{aligned}\delta_U \phi^i &= 0, \\ \delta_U \chi_L^i &= \frac{1}{6}(-u + 2u^*)\chi_L, \\ \delta_U F^i &= \frac{1}{3}(-u + 2u^*)F^i + \frac{1}{6}\chi_{UL}\chi_L^i\end{aligned}\quad (3.277)$$

このような非自明な変換は、座標を正規座標にとっていた場合にワイル変換を行うと、その結果が必ずしも正規座標にはならないために、正規座標に戻す座標変換を行う必要があり、その座標変換

$$\delta\Phi = S^\alpha \mathbf{D}_\alpha \Phi \quad (3.278)$$

の結果として成分場が変化すると考えることもできる。正規座標に戻すために必要な座標変換 $\delta Y^{M'} = S^{M'}$ は正規座標におけるカイラル超場の展開式 (3.218) とワイル変換によるカイラル成分場の変換則 (3.277) を比較することによって次のように決めることができる。

$$S^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{6}(-u + 2u^*)\Theta^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{6}\Theta^2\chi_{\bar{U}}^{\bar{\alpha}}. \quad (3.279)$$

さらに、カイラル密度 \mathcal{E} に対しては、ワイル変換 (3.275) と正規座標に戻すための座標変換の寄与をあわせると次の式が成り立つ。

$$\delta_W \mathcal{E} = -U\mathcal{E} - \mathbf{D}_{\bar{\alpha}}(S^{\bar{\alpha}}\mathcal{E}),$$

カイラル射影演算子については

$$\delta_W(P_{\text{chiral}}X) = \frac{1}{3}P_{\text{chiral}}[(-U^* + 2U)X] + S^{\bar{\alpha}}\mathbf{D}_{\bar{\alpha}}(P_{\text{chiral}}X) \quad (3.280)$$

が成り立つ。第 1 項が超場としての変化分、第 2 項が座標変換によるもの。従って、カイラル超空間上でのカイラル超場の積分は表面項を除き超ワイル変換のもとで次のように変換される。

$$\delta_W \int d^2\Theta \mathcal{E} P_{\text{chiral}}X = \int d^2\Theta \mathcal{E} P_{\text{chiral}} \left[-\frac{1}{3}(U + U^*)X \right] \quad (3.281)$$

あるいは

$$\delta_W \int d^4\theta EX = \int d^4\theta E \left[-\frac{1}{3}(U + U^*)X \right] \quad (3.282)$$

3.14 超対称ゲージ理論と重力の結合

ゲージ場に結合したカイラル多重項を重力に結合させることを考えよう。物質場のケーラーポテンシャルは一般にゲージ不変では無くても良いが、それがもしゲージ不変であれば、重力への結合は簡単で、(3.242)において、カイラル超場 Φ を全てカノニカルなカイラル超場 $\tilde{\Phi}$ に置き換えればよい。すなわち、次の積分が超対称不変でゲージ不変な作用を与える。

$$S = \int d^4x \int d^4\theta E \left[\mathcal{K}(\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}^*) - 2 \operatorname{Re} \frac{W(\tilde{\Phi})}{\mathcal{R}} \right] \quad (3.283)$$

ケーラーポテンシャルがゲージ不変ではない場合にも、作用を構成するのは簡単であるが、そのゲージ不変性について注意が必要である。大域的超対称理論において、ケーラーポテンシャルがゲージ不変で無い場合には相殺項 (1.180) の導入が必要であることを見た。これを重力に結合させるには、(3.242) のケーラーポテンシャルを相殺項を含むものに置き換えればよい。

$$S = -\frac{6}{k^2} \int d^4x d^4\theta E \left[\exp -\frac{k^2}{6} (K(\Phi, \Phi^*) + \Gamma(\Phi, \Phi^*, V)) \right] \quad (3.284)$$

ゲージ変換のもとでのこの作用の変分は (1.172) を用いて次のように得られる。

$$\delta S = \int d^4x d^4\theta E (i\Lambda^\alpha f_\alpha - i\Lambda^{*\alpha} f_\alpha^*) \left[\exp -\frac{k^2}{6} (K(\Phi, \Phi^*) + \Gamma(\Phi, \Phi^*, V)) \right] \quad (3.285)$$

大域的超対称理論の場合には、ケーラー変換に対応する変化分は作用積分には寄与しなかったが、今度はそうはならない。しかし、この変化分は超ワイル変換 (3.282) を行うことによって打ち消すことができる。実際、上記の作用に対して超ワイル変換を行ってみると、

$$\delta_W S = \frac{2}{k^2} \int d^4x d^4\theta E (U + U^*) \left[\exp -\frac{k^2}{6} (K(\Phi, \Phi^*) + \Gamma(\Phi, \Phi^*, V)) \right] \quad (3.286)$$

となる。従って、

$$U = -\frac{ik^2}{2} \Lambda^\alpha f_\alpha \quad (3.287)$$

と置くことにより、これら二つの変分が相殺することがわかる。

このように書かれた作用を成分場で展開するには、ここまで得られた公式を用いればよい。しかしそのようにして得られた作用の形はそのままではゲージ不変性が明白ではない。例えば、運動項に含まれる微分を共変微分にするには適切に相互作用項を組み合わせる必要がある。ここではグラビティーノ運動項に注目し、そこに含まれる微分がどのように共変微分になるかを見ておこう。(3.177) に与えられた D-term

作用を見ると、(3.284) の中に次の項が存在していることがわかる。

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2}K - \mu_\alpha V^\alpha]_D &= \cdots - i(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 \psi_\rho) \left(-\frac{i}{2}(\partial_\nu \phi^i) K_i + \frac{i}{2}(\partial_\nu \phi^{*\bar{i}}) K_{\bar{i}} - v_\nu^\alpha \mu_\alpha \right) \\ &= \cdots + i(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 \psi_\rho) S_\nu^{(G)} \end{aligned} \quad (3.288)$$

これにより、運動項 $-(4/k^2)(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho)$ の微分が次の共変微分に置き換わる。

$$\mathcal{D}_\nu \psi_\rho = D_\nu \psi_\rho - \frac{ik^2}{4} S_\nu^{(G)} \gamma_5 \psi_\rho \quad (3.289)$$

ケーラーポテンシャルがゲージ不変である場合の作用 (3.283) にも相互作用 (3.288) は含まれている。しかし、ケーラーポテンシャルのゲージ不変性を用いるとケーラー接続を

$$S_\nu^{(G)} = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_\nu \phi^i) K_i + \frac{i}{2}(\mathcal{D}_\nu \phi^{*\bar{i}}) K_{\bar{i}} \quad (3.290)$$

と書くことができ、しかもゲージ不変であることを示すことができる。従ってこの場合には共変微分 (3.289) の定義の右辺にある項それぞれが独立にゲージ不変であり、ゲージ不変性をあらわにするために共変微分 (3.289) を用いる必要は無い。

次に、超ポテンシャル項のゲージ不変性について見てみよう。大域的超対称理論においては超ポテンシャルはゲージ不変なカイラル超場の正則関数であった。しかし、超重力理論において、ケーラーポテンシャルがゲージ不変で無い場合には、ゲージ変換によって超ワイル変換が引き起こされるため、超ポテンシャルはそれによる変化を相殺するような変化をする必要がある。具体的に次のポテンシャル項を考えよう。

$$S_{\text{pot}} = - \int d^2\theta \mathcal{E} W \quad (3.291)$$

実際にはさらに複素共役を加える必要があるが、ここでは正則部分に注目する。 W はもともとケーラー変換のもとで不変であった。しかし、補正されたケーラー変換は超ワイル変換を引き起こす。従って、超ポテンシャル項は一般に補正されたケーラー変換のもとでの不変性を破る。

$$\delta S_{\text{pot}} = \int d^2\theta \mathcal{E} (UW - \delta W) = \int d^2\theta \mathcal{E} \left(-\frac{ik^2}{2} \Lambda^\alpha f_\alpha W - \delta W \right) \quad (3.292)$$

従って、作用がゲージ不変であるためには、超ポテンシャルはゲージ変換のもとで次のように変換される必要がある。

$$\delta W = -\frac{ik^2}{2} \Lambda^\alpha f_\alpha W \quad (3.293)$$

これは、次の関数がカイラルゲージ変換のもとで不変であるということと等価である。

$$G = |W|^2 \mathcal{K}^{-1/3} = |W|^2 \exp \frac{k^2 K}{2} \quad (3.294)$$

3.15 超重力理論の作用の例 (2)

$U(1)$ ゲージ場と重力からなる系において FI パラメータが 0 でない場合を考えよう。以前にも述べたように、FI パラメータはケーラーポテンシャルがゲージ不変ではないことから現れる項である。ここでは物質場は無いとしているので、ケーラーポテンシャルは $K = 0$ とおいてよい。この場合であっても、次のような「ケーラー変換」を考えることができる。

$$\delta K = -\epsilon(f + f^*), \quad f = i\zeta, \quad \zeta \in \mathbf{R}. \quad (3.295)$$

上記の ζ は実定数であり、実際にはケーラーポテンシャル $K = 0$ は不変であるが、ケーラー変換を表す正則関数は 0 ではない。このとき、キリングポテンシャルは (1.154) より

$$\mu = \zeta \quad (3.296)$$

と与えられる。従って、相殺項 (1.180) は

$$\Gamma(V) = -2\zeta V \quad (3.297)$$

であり、超対称不変な作用は次のようになる。

$$S = -\frac{6}{k^2} \int d^4\theta E \exp\left(\frac{k^2\zeta}{3}V\right) \quad (3.298)$$

特に、Wess-Zumino ゲージでは、 V の 2 次の項までが存在し、成分場を用いて次のように展開することができる。

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{k^2} \left(\frac{8}{3}c_m c^m - 6MM^* + R_{mn}{}^{mn} - 2(\psi_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) \right) \\ & + \zeta \left(-D - \frac{4}{3}c_m v^m + i(\psi_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \lambda) - i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\rho) v_\nu \right) \\ & + \frac{k^2\zeta^2}{6} v_m v^m \end{aligned} \quad (3.299)$$

FI パラメータが $U(1)_R$ 対称性の結合定数とみなせることに対応して、グラビティーノの運動項と、 ψ_μ と v_μ の相互作用項が次の共変微分の形にまとまる。

$$\mathcal{D}_\nu \psi_\rho = D_\nu \psi_\rho - \frac{ik^2\zeta}{4} v_\nu \gamma_5 \psi_\rho \quad (3.300)$$

一方、ゲージ場の運動項は (3.241) に与えられているように

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{2}(\lambda D \lambda) - \frac{i}{2}(\lambda \gamma_5 \not{\xi} \lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2 \\ & - \frac{1}{2}F_{mn}(\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) + S_{4\text{-fermi}} \end{aligned} \quad (3.301)$$

である。これらを加えると、次の作用を得る。

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{k^2} \left(+R_{mn}{}^{mn} - 4(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \mathcal{D}_\nu \psi_\rho) - 6MM^* + \frac{8}{3} c_m'^2 \right) \\
& + \zeta (-D + i(\psi_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \lambda)) \\
& - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\lambda \not{\mathcal{D}} \lambda) + \frac{1}{2} D^2 \\
& - \frac{i}{2} (\lambda \gamma_5 \not{\mathcal{D}} \lambda) - \frac{1}{2} F_{mn} (\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) + S_{4\text{-fermi}}
\end{aligned} \tag{3.302}$$

ただし、補助場 c_μ をシフトし、 c'_μ を次のように定義した。

$$c'_m = c_m - \frac{k^2 \zeta}{4} v_m \tag{3.303}$$

また、 λ の共変微分が次のように定義される。

$$\mathcal{D}_\mu \lambda = D_\mu \lambda - \frac{k^2 \zeta}{4} i v_\mu \gamma_5 \lambda \tag{3.304}$$

このように、成分場で書かれた作用を見ると、確かにグラビティーノとゲージノが $U(1)$ ゲージ場に結合していることがわかる。

3.16 $U(1)$ 超空間

前節において示したように、 $U(1)$ ゲージ変換がケーラー変換を伴う場合、すなわち FI パラメータが 0 でない場合には、超場形式で与えた作用はゲージ不変性が明白ではない。この点を改善し、始めからゲージ不変性が明白である作用を得るには $U(1)$ 超空間 [36] を用いるのが便利である。また、ここまで述べた超場形式の不満な点として、カノニカルな運動項を得るためには最後にワイル変換を行わなければならないという点が挙げられる。この問題点も $U(1)$ 超空間を用いることで改善される。

ゲージ不変性が明白ではない原因は、グラビティーノを非自明に変換するような $U(1)$ ゲージ変換が超場形式の定式化の中に含まれていないためである。そこで、超空間の定義に戻って、最初からこの $U(1)$ ゲージ変換のもとでの共変性を組み込んだ形で超空間を定義することが必要になる。このような超空間は $U(1)$ 超空間と呼ばれる。グラビティーノに作用するこの $U(1)$ 対称性を以下では特に $U(1)_K$ と表すことにする。

3.16.1 ビアンキ項等式

$U(1)$ 超空間では、グラビティーノを含む多脚場の成分 E_μ^a に結合する超空間上のゲージ場を始めから導入しておく。この $U(1)_K$ ゲージ場を $A_M^{(K)}$ とし、その場の強

さを $F^{(K)}$ としよう。

$$F^{(K)} = dA^{(K)}. \quad (3.305)$$

多脚場に結合するゲージ場であることを強調するために (K) という添え字をつけた。一般には $E_M^{\bar{\alpha}}$ は複数の $U(1)$ ゲージ場 A_M^i に異なる結合定数 ζ_i で結合することができるが、そのような場合にはこの節で用いられるゲージ場をそれらの線形結合 $A_M^{(K)} = \zeta_i A_M^i$ とみなしておけばよい。この $U(1)_K$ ゲージ場を多脚場と結合させるために多脚場の $U(1)_K$ 電荷（ここではウェイトと呼ぶ）を次のようにとる。

$$w(E^{\bar{\alpha}}) = 1, \quad w(E^{\underline{\alpha}}) = -1. \quad (3.306)$$

そしてこのゲージ場に対する共変微分を次のように定義する。

$$\mathcal{D}_M X = D_M X - iw(X)A_M^{(K)} X \quad (3.307)$$

換率を定義する場合にはこの共変微分を用いる。すなわち、

$$T^A = \mathcal{D}E^A = DE^A - iw(E^A)A^{(K)} E^A \quad (3.308)$$

のように、換率 T^A はゲージ場の寄与を含むことに注意する。また、ゲージ群が $U(1)_K$ であるから、ゲージ場 $A_M^{(K)}$ 自身は電荷を持たないが、ローレンツ添え字を持つものについてはウェイトを持っていることに注意する。そのため、ゲージ場の強さを次のように表す場合には微分が共変微分になる。

$$F_{AB} = \mathcal{D}_A A_B^{(K)} - (-)^{AB} \mathcal{D}_B A_A^{(K)} + T_{AB}{}^C A_C^{(K)} \quad (3.309)$$

換率と場の強さ F に対する拘束条件は以前と同様に次のように取る。

$$T_{mn}{}^k = T_{am}{}^n = T_{ab}{}^c = 0, \quad T_{ab}{}^m = 2(\gamma^m)_{ab}. \quad (3.310)$$

$$F_{ab} = 0 \quad (3.311)$$

さらに、ビアンキ項等式は次のように与えられる。

$$0 = \frac{1}{6} E^C E^B E^A I_{ABC} = \frac{1}{2} E^C E^B E^A (\mathcal{D}_A F_{BC} + T_{AB}{}^D F_{DC}) \quad (3.312)$$

$$0 = \frac{1}{6} E^C E^B E^A I_{ABCD} = \frac{1}{6} E^C E^B E^A I_{ABCD}^{(0)} + \frac{1}{2} E^C E^B E^A iw(E^D) F_{AB}^{(K)} C_{CD} \quad (3.313)$$

$I_{ABCD}^{(0)}$ は以前に与えたゲージ場と結合していないときのビアンキ項等式である。ただし、その中の換率はゲージ場を含むものに置き換えられている。

以上の関係式を、重力とゲージ場の間の結合に注意しながら解きなおそう。

まず、ゲージ場に対するビアンキ項等式 (3.312) を解くことにより、次の関係式を得ることができる。以前との違いは、微分が共変微分に置き換えられていることのみである。

$$F_{ma} = (\gamma_m)_{ab} \widetilde{W}^b, \quad F_{mn} = \frac{1}{4} (\gamma_{mn})^{ab} \mathcal{D}_a \widetilde{W}_b \quad (3.314)$$

ただし \widetilde{W} は次の式を満足するカイラル超場である。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{a}} \widetilde{W}_b &= 0, \\ \mathcal{D}_a \widetilde{W}_{\bar{b}} &= 0, \\ \mathcal{D}_a \widetilde{W}^a &= 0. \end{aligned} \quad (3.315)$$

$\widetilde{W}^{\bar{a}}$ のウェイトは $w(\widetilde{W}^{\bar{a}}) = 1$ である。始めの二つは $\widetilde{W}_{\bar{a}}$ がカイラルであることを表している。最後の関係式は、ゲージ場のビアンキ項等式に相当するものである。

ゲージ多重項 $A_M^{(K)}$ の成分場は次のように定義される。

$$\begin{aligned} A_\mu^{(K)}|_{\theta=0} &= v_\mu^{(K)}, \\ \widetilde{W}_{\bar{a}}^{(K)}|_{\theta=0} &= \lambda_{\bar{a}}^{(K)}, \\ -\frac{i}{2} \mathcal{D}_{\bar{a}} \widetilde{W}^{(K)\bar{a}}|_{\theta=0} &= D^{(K)}. \end{aligned} \quad (3.316)$$

成分場 D が実であることは (3.315) の最後の式によって保障される。

次に、換率に対するビアンキ項等式を解いていこう。 $I_{abmn} = I_{abcd} = I_{akmn} = 0$ については、 F の寄与が無いことがすぐに確かめられる。従って、関係式 (3.81) と (3.83) はそのまま成り立つ。換率を展開することで定義される場のウェイトが次のように決まる。

$$w(\widetilde{\mathcal{R}}) = 2, \quad w(V_m) = 0, \quad w(T_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = w(T_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}) = w(T_{\bar{a}}) = 1. \quad (3.317)$$

$I_{\bar{a}\bar{b}m\bar{c}} = 0$ から $\widetilde{\mathcal{R}}$ がカイラル超場であることが示されることも同様である。ただし、今度は $\widetilde{\mathcal{R}}$ が 0 でないウェイトを持つから微分が共変微分に置き換わる。そのため、 $\widetilde{\mathcal{R}}$ はカノニカルなカイラル超場であり、そのことを表すために \mathcal{R} ではなく $\widetilde{\mathcal{R}}$ と書くことにする。

$$\mathcal{D}_a \widetilde{\mathcal{R}} = 0. \quad (3.318)$$

変更を受けるのは、次のビアンキ項等式である。

$$0 = I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{d})} = I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{d})}^{(0)} + iF_{(\bar{c}\bar{d})\bar{b}} C_{\bar{a}\bar{d}} = I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{d})}^{(0)} + 2iC_{\bar{c}\bar{b}} C_{\bar{a}\bar{d}} \widetilde{W}_{\bar{c}}^{(K)} \quad (3.319)$$

$I_{\bar{a}\bar{b}(\bar{c}\bar{d})}^{(0)}$ は F を含まない部分であり、微分が $U(1)_K$ 共変微分に置き換えられていることを除き以前と同じ形をしている。 F を含む項の存在のために、(3.87) の 3 つの

関係式は以下のように変化する。

$$\begin{aligned}
0 &= I_{\bar{a}b(\bar{c}d)\bar{a}}|_{\{cb\}} = \left(C_{\bar{c}a}C_{\bar{d}}^{\bar{e}} - \frac{1}{3}C_{\bar{c}\bar{d}}C_{\bar{a}}^{\bar{e}} \right) \left(\frac{i}{2}D_{\bar{b}}V_{\bar{c}\bar{e}} + \frac{i}{2}D_{\bar{c}}V_{\bar{b}\bar{e}} + 6T_{\bar{e}bc} \right), \\
0 &= I_{\bar{a}}^b(\bar{b}\bar{b})^{\bar{b}} = 4\mathcal{D}_{\bar{a}}\tilde{\mathcal{R}} - \frac{i}{3}D_{\bar{b}}V_{\bar{a}}^b + 30T_{\bar{a}} + 4i\widetilde{W}_{\bar{a}}^{(K)}, \\
0 &= I_{\bar{a}}^b(\bar{b}\bar{b})^{\bar{c}}|_{\{\bar{b}\bar{c}\}} = C_{\bar{a}\bar{c}}(iD_{\bar{d}}V_{\bar{b}}^{\bar{d}} + 6T_{\bar{b}} + 4i\widetilde{W}_{\bar{b}}^{(K)})|_{\{\bar{b}\bar{c}\}} \quad (3.320)
\end{aligned}$$

一つ目の式は変化しないが、二番目と三番目の式には新たにゲージ場の寄与が加わる。これらが成り立つと $I_{\bar{a}b(\bar{c}d)\bar{a}} = 0$ も自動的に成り立つことは以前と同様である。後ろ二つの式を整理すれば、(3.89)の代わりに次の式を得る。

$$\mathcal{D}_{\bar{a}}\tilde{\mathcal{R}} = \frac{4i}{3}D_{\bar{b}}V_{\bar{a}}^b + 4i\widetilde{W}_{\bar{a}}^{(K)} = -8T_{\bar{a}} - \frac{4i}{3}\widetilde{W}_{\bar{a}}^{(K)} \quad (3.321)$$

この式と(3.320)の最初の式を組み合わせることで得られる次の式は V_m のスピノル微分を与える。

$$D_{\bar{b}}V_{\bar{c}\bar{a}} = (3iT_{\bar{a}} - 2\widetilde{W}_{\bar{a}}^{(K)})C_{\bar{b}\bar{c}} + i6T_{\bar{a}bc}, \quad (3.322)$$

(3.112) に与えたカイラル超場 \mathcal{R} の成分場は次のように変化する。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}|_{\theta=0} &= M, \\
\mathcal{D}_{\bar{a}}\tilde{\mathcal{R}}|_{\theta=0} &= -8\psi_{\bar{a}}^{(s)} - \frac{4i}{3}\lambda_{\bar{a}}^{(K)} \\
\frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{a}}\tilde{\mathcal{R}}|_{\theta=0} &= \frac{2i}{3}D_m^{(s)}c^m - \frac{4}{9}c_m c^m - 2MM^* - \frac{1}{6}R_{mn}^{(s)mn} + \frac{4}{3}D^{(K)} \quad (3.323)
\end{aligned}$$

ただし、最後の成分を計算するのに(3.96)の第1式が次のように変化することを用いた。

$$0 = C^{\bar{a}b}I_{(\bar{a}a)(\bar{b}b)}^{\bar{a}\bar{b}} = C^{\bar{a}b}I_{(\bar{a}a)(\bar{b}b)}^{(0)\bar{a}\bar{b}} - 2i\mathcal{D}_{\bar{a}}\widetilde{W}^{(K)\bar{a}} \quad (3.324)$$

ゲージ場に対する拘束条件(3.311)は直接次のように解くことができる。

$$\begin{aligned}
A_{\bar{a}}^{(K)} &= D_{\bar{a}}(U^{(K)} - iV^{(K)}), \\
A_{\underline{a}}^{(K)} &= D_{\underline{a}}(U^{(K)} + iV^{(K)}), \\
A_m^{(K)} &= D_m U^{(K)} + \frac{i}{4}(\gamma_m)^{\bar{a}b}[\mathcal{D}_{\bar{a}}, \mathcal{D}_{\bar{b}}]V^{(K)}. \quad (3.325)
\end{aligned}$$

$U^{(K)}$ と $V^{(K)}$ はウェイトを持たない任意の実スカラー超場である。始めの二つはそれぞれ $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ より $F_{\underline{a}\underline{b}} = 0$ を解いて得られる。最後の一つは $F_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ に上二つの解を代入して得られる。 $F_{m\bar{a}}^{(K)}$ 以上のゲージ場を代入すれば、次の式を得る。

$$\widetilde{W}_{\bar{a}}^{(K)} = iP_{\text{chiral}}D_{\bar{a}}V^{(K)} \quad (3.326)$$

P_{chiral} はカイラル射影演算子であるが、その中の微分演算子は $U(1)_K$ 共変微分に置き換えられている。

$$P_{\text{chiral}} = \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{b}}\mathcal{D}^{\bar{b}} + \tilde{\mathcal{R}} \quad (3.327)$$

$U(1)$ 超空間においても、右スピン添え字を持たない超場に対して P_{chiral} を作用させることでカイラル超場を構成できることは以前と同様である。これは、 $U(1)$ ゲージ場が複数あり、それらに対して任意の電荷を持つ場であっても同様である。

3.16.2 カイラル密度

複数個の $U(1)$ ゲージ場 A_M^i があり、それらに対して電荷 q_i を持つカノニカルなカイラル超場を $\tilde{\Phi}$ としよう。この超場は次のカイラル条件を満足する。

$$\mathcal{D}_{\underline{a}}\tilde{\Phi} = 0. \quad (3.328)$$

成分場は次のように定義する。

$$\begin{aligned} \phi &= \tilde{\Phi}|_{\theta=0}, \\ \chi_{\bar{a}} &= \mathcal{D}_{\bar{a}}\tilde{\Phi}|_{\theta=0}, \\ F &= \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}^{\bar{a}}\tilde{\Phi}|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (3.329)$$

$A_M^{(K)} = \zeta_i A_M^i$ であるような $U(1)$ 超空間では、成分場の電荷が一般には超場の電荷とずれることに注意しなければならない。

$$\tilde{\Phi} : q_i, \quad \phi : q_i, \quad \chi_L : q_i - \zeta_i, \quad F : q_i - 2\zeta_i. \quad (3.330)$$

それぞれの成分場に作用する共変微分はこれらの電荷を用いて定義される。

$\delta\Phi = \xi^{\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{a}}\Phi$ から成分場 (3.329) の変換則を読み取れば次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= (\xi_L\chi_L), \\ \delta\chi_{\bar{a}} &= -2\xi^{\underline{b}}\mathcal{D}_{\underline{b}\bar{a}}^{(s)}\phi + 2\xi_{\bar{a}}F, \\ \delta F &= (\xi_R\mathcal{D}^{(s)}\chi_L) + \frac{i}{3}(\xi_R\chi_L) - M^*(\xi_L\chi_L) - 2iq_i(\xi_R\lambda_R^i)\phi \end{aligned} \quad (3.331)$$

ゲージ場に結合している場合には成分場 F の変換則の中にゲージ多重項のフェルミオン λ が現れることに注意。また、微分はゲージ共変微分になっており、その中にはゲージ場 v_{μ} が含まれている。超共変微分は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu}^{(s)}\phi &= \partial_{\mu}\phi - (\psi_{\mu L}\chi_L) - iq_{\mu}\phi, \\ \mathcal{D}_{\mu}^{(s)}\chi_{\bar{a}} &= \mathcal{D}_{\mu}\chi_{\bar{a}} - 2\psi_{\mu\bar{a}}F + 2\psi_{\mu}^{\underline{b}}\mathcal{D}_{\underline{b}\bar{a}}^{(s)}\phi \end{aligned} \quad (3.332)$$

$U(1)$ 超空間上の電荷を持つカイラル超場についても新たなスピノル座標 Θ_L を用いて超対称変換を書いておこう。

$$\tilde{\Phi}(x, \Theta_L) = \phi + \Theta_L\chi_L + \Theta_L^2 F \quad (3.333)$$

カイラル多重項の超対称変換は、この超場に対する次のような変換として実現することができる。

$$\delta\tilde{\Phi} = \eta^M \mathbf{D}_M \tilde{\Phi} + q_i(\Phi) \Lambda^i \tilde{\Phi}. \quad (3.334)$$

ただし、 η^M と Λ^i は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \eta^\mu &= 2(\Theta_L \gamma^\mu \xi_R) - 2\Theta_L^2 (\xi_R \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu R}) \\ \eta_L &= \xi_L - \eta^\mu \psi_{\mu L} + \Theta_L^2 \left[(\omega_\mu - iA_\mu^{(K)}) \gamma^\mu \xi_R - \frac{i}{3} \mathbb{K} \xi_R - \tilde{\mathcal{R}}^* \xi_L \right] \\ \Lambda^i &= -2i\Theta_L^2 (\xi_R \lambda_R^i) \end{aligned} \quad (3.335)$$

ただし、ここでの微分 \mathbf{D}_M は次のように定義される。

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - iq_i A_\mu^i, \quad \mathbf{D}_{\bar{a}} = \partial_{\bar{a}}. \quad (3.336)$$

\mathbf{D}_μ がスピン接続を含まないこと、超場 $\tilde{\Phi}$ の持つ電荷 q_i を用いて定義されていることに注意しよう。このため、成分場に \mathbf{D}_μ が作用する場合には局所ローレンツ回転に対してもゲージ変換に対しても共変にはなっていない。たとえば、 δF 中の D_χ を含む項について見てみると、 η^μ 中の Θ の 1 次の項と $\tilde{\Phi}$ 中の Θ の 1 次の項を組み合わせた次の部分から得られる。

$$\delta\tilde{\Phi} = 2(\Theta_L \gamma^\mu \xi_R) D_\mu (\Theta_L \chi_L) + \dots = \Theta_L^2 (\xi_R \gamma^\mu D_\mu \chi_L) + \dots \quad (3.337)$$

この中の微分は上で述べた理由により共変微分ではない。しかしこれとは別に $\eta^{\bar{a}}$ の中に含まれるスピン接続とゲージ場を含む項からの寄与

$$\delta\tilde{\Phi} = \Theta_L^2 \xi_R \gamma^\mu (\omega_\mu + iA_\mu) \gamma^\mu \chi_L + \dots \quad (3.338)$$

を加えることにより共変微分 $\mathcal{D}_\mu^{(s)} \chi_L$ の形にまとまる。

電荷が q_i であるカイラル密度は次のように変換されるものとして定義される。

$$\delta\Delta = (-)^M D_M (\eta^M \Delta) + q_i(\Delta) \Lambda^i \Delta \quad (3.339)$$

この成分場を次のようにおく。

$$\Delta = a + \Theta_L \rho_L + \Theta_L^2 f \quad (3.340)$$

成分場の変換則を (3.223) から読み取れば

$$\begin{aligned} \delta a &= \xi_L \rho_L + 2(\xi_R \gamma^\mu \psi_{\mu L}) a, \\ \delta \rho_L &= 2\mathcal{D}_\mu^{(q+\zeta)} (\gamma^\mu \xi_R a) + 2\xi_L f + 2(\rho_L \gamma^\mu \xi_R) \psi_{\mu L} \\ &\quad + 2a \left(-\frac{i}{3} \mathbb{K} \xi_R - \tilde{\mathcal{R}}^* \xi_L + 2(\xi_R \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu R}) \psi_{\mu L} \right) \end{aligned} \quad (3.341)$$

となる。 $\delta\rho_L$ の第 1 項の微分は電荷 $q_i + \zeta_i$ の場に作用する共変微分である。このことは、(ξ_R の電荷は $-\zeta_i$ であるから) 初項 a の電荷は $q_i + 2\zeta_i$ であることを意味している。すなわち、カイラル密度の電荷は末尾の成分 f の電荷に一致する。これはカイラル超場の場合とは逆になっているので注意が必要である。

$$\Delta : q_i, \quad a : q_i + 2\zeta_i, \quad \rho_L : q_i + \zeta_i, \quad f : q_i. \quad (3.342)$$

カイラル密度の中で特に重要なのは、初項として $a = e$ を持つ \mathcal{E} である。このカイラル密度の成分場は変換則を比較することにより次のように決定することができる。

$$\begin{aligned} a &= e, \\ \rho_L &= 2e\gamma^\mu\psi_{\mu R}, \\ f &= 3eM^* + 2e(\psi_{\mu R}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\nu R}) \end{aligned} \quad (3.343)$$

e はウェイトを持たないから、カイラル密度 \mathcal{E} のウェイトは -2 である。従って、ウェイト 2 を持つカイラル超場 $\tilde{\Phi}^{(2)}$ を用いて

$$\begin{aligned} S &= [\tilde{\Phi}^{(2)}]_F^{U(1)\kappa} \\ &= \int d^4x \int d^2\Theta \mathcal{E} \tilde{\Phi}^{(2)} \\ &= \int d^4x e [F + (\psi_{Rm}\gamma^m\chi_L) + (3M^* + 2(\psi_{Rm}\gamma^{mn}\psi_{Rn}))\phi] \end{aligned} \quad (3.344)$$

のように超対称変換のもとで不変な作用を構成することができる。これは通常のローレンツ超空間における作用 (3.174) と同じ形をしている。

D 項ラグランジアンは $(1/2)[X]_D = [P_{\text{chiral}}X]_F$ によって与えることができる。ただし X は電荷を持たない一般の超場である。射影演算子を用いて定義されたカイラル超場の成分場は、 $U(1)$ ゲージ場との結合によって以下のように変化する。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L P_{\text{chiral}}X|_{\theta=0} &= \cdots - \frac{4i}{3}\lambda_L^{(K)}B, \\ \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}P_{\text{chiral}}X|_{\theta=0} &= \cdots + \frac{4}{3}D^{(K)}B - \frac{i}{3}(\lambda^{(K)}\gamma_5\eta) \end{aligned} \quad (3.345)$$

このような補正項を取り入れると、 $U(1)$ 超空間では D -項作用が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} [X]_D &= D + \frac{4}{3}c_m v^m + 2M^*C^* + 2MC \\ &+ \left(-\frac{8}{9}c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3}R_{mn}{}^{mn} + \frac{2}{3}(\psi_\mu\gamma^{\mu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma}) \right) B \\ &- i(\psi_\mu\gamma^\mu\gamma_5\lambda) - \frac{1}{6}(\eta\gamma^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}) + (\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\nu\eta) + i(\psi_\mu\gamma_5\gamma^{\mu\nu\rho}\psi_\rho)v_\nu \\ &+ \frac{4}{3}D^{(K)}B - \frac{i}{3}(\lambda^{(K)}\gamma_5\eta) + \frac{4i}{3}(\psi_\mu\gamma_5\gamma^\mu\lambda^{(K)})B \end{aligned} \quad (3.346)$$

3.17 超重力理論の作用の例 (3)

3.17.1 FI パラメータを含む理論

$U(1)$ 超空間を用いて、FI パラメータが 0 でないような $U(1)$ ゲージ理論を構成してみよう。

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{k^2}[1]_D^{U(1)K} &= \frac{1}{k^2} \left[R_{mn}{}^{mn} - 2(\psi_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) + \frac{8}{3}c_m c^m - 6MM^* \right. \\
 &\quad \left. - 4D^{(K)} - 4i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^{(K)}) \right] \\
 -\frac{1}{2}[W_L^2]_F^{U(1)K} &= -\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} - \frac{1}{2}(\lambda \not{\mathcal{D}} \lambda) + \frac{1}{2}D^2 \\
 &\quad - \frac{i}{2}(\lambda \gamma_5 \not{\mathcal{K}} \lambda) - \frac{1}{2}F_{mn}(\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) + S_{4\text{-fermi}} \quad (3.347)
 \end{aligned}$$

単純超重力理論の作用に相当する部分から FI 項が自動的に現れていることがわかる。ここで

$$A_M^{(K)} = \frac{k^2 \zeta}{4} A_M \quad (3.348)$$

と置けば、これらの和は次のように以前に与えたものである。

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{k^2} \left[R_{mn}{}^{mn} - 2(\psi_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) + \frac{8}{3}c_m c^m - 6MM^* \right] \\
 &\quad - \zeta D - \zeta i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \lambda) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\lambda \not{\mathcal{D}} \lambda) - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{2}D^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}F_{mn}(\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) - \frac{i}{2}(\lambda \gamma_5 \not{\mathcal{K}} \lambda) + S_{4\text{-fermi}} \quad (3.349)
 \end{aligned}$$

これは (3.302) と同じものであるが、補助場のシフトなどを行う必要がなく初めからゲージ共変な形で作用が得られる。

ただし、 λ と ψ_μ の共変微分は

$$\mathcal{D}_\mu = D_\mu - \frac{i\zeta k^2}{4} A_\mu \gamma_5 \quad (3.350)$$

と定義される。

3.17.2 カイラル多重項と重力の結合

$U(1)$ 超空間は、ゲージ場多重項を含まない、カイラル多重項の作用を書く場合にも便利である。その場合には、プレポテンシャルを次のようにケーラーポテンシャルと等しいと置く。

$$i\mathcal{U}^{(K)} = -\frac{ik^2}{8} K \quad (3.351)$$

こうすることにより、作用 $-(3/k^2)[1]_D$ に含まれる $-(4/k^2)D^{(K)}$ からカイラル多重項の運動項が現れる。

F 項ラグランジアンを与えるためにはウェイトが 2 のカイラル超場が必要である。カイラル超場のウェイトを全て 0 と置くと、その正則関数である超ポテンシャル W のウェイトも 0 である。そこで、ウェイトをあわせるために、プレポテンシャルで書かれるカイラル超場 $e^{2iU^{(K)}}$ を利用する。このカイラル超場の成分場は次の式の $\theta = 0$ 成分を取れば得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\bar{a}}e^{2iU^{(K)}} &= -4(D_{\bar{a}}V)e^{2iU^{(K)}}, \\ \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{a}}e^{2iU^{(K)}} &= (-D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}V^{(K)} + 3D_{\bar{a}}V^{(K)}D^{\bar{a}}V^{(K)} - iD_{\bar{a}}U^{(K)}D^{\bar{a}}V^{(K)})e^{2iU^{(K)}}\end{aligned}\quad (3.352)$$

これらの式を得るには $e^{2iU} = e^{-4V}e^{2iU^*}$ と分解して e^{2iU^*} が反カイラルであることを用いれば簡単である。

$$\begin{aligned}e^{2iU^{(K)}}|_{\theta=0} &= e^{(k^2/4)K}, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}}e^{2iU^{(K)}}|_{\theta=0} &= \frac{k^2}{2}e^{(k^2/4)K}(D_{\bar{a}}K)|_{\theta=0}, \\ \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{a}}e^{2iU^{(K)}}|_{\theta=0} &= e^{(k^2/4)K}\left(\frac{k^2}{8}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}K + \frac{3k^4}{64}D_{\bar{a}}KD^{\bar{a}}K\right)|_{\theta=0}\end{aligned}\quad (3.353)$$

これらを組み合わせて、カイラル多重項の運動項を導出しよう。ここでは計算を簡単にするためにボゾン部分にのみ注目し、正規座標を用いる。ポテンシャル項を書くのに必要な超場は次のように展開される。

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= e(1 + 3\Theta^2M^*), \\ e^{2iU^{(K)}} &= e^{(k^2/4)K}\left(1 + \frac{k^2}{2}\Theta^2K_iF^i\right), \\ W(\Phi) &= W + \Theta^2W^iF_i.\end{aligned}\quad (3.354)$$

これらを組み合わせて、次のポテンシャル項が得られる。

$$-[W]_F^{U(1)K} = -ee^{(k^2/4)K}\left(W_iF^i + 3WM^* + \frac{k^2}{2}WK_iF^i\right)\quad (3.355)$$

一方、以前に得られた運動項は次のものを含む。

$$-\frac{6}{k^2}MM^* - K_{i\bar{j}}g_{\mu\nu}\partial\phi^i\partial\phi^{*\bar{j}} + K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}}\quad (3.356)$$

補助場に対する運動方程式を解くと、

$$\begin{aligned}M &= -\frac{k^2}{2}e^{(k^2/4)K}W, \\ F^i &= e^{(k^2/4)K}K^{i\bar{j}}\left(W_{\bar{j}}^* + \frac{k^2}{2}W^*K_{\bar{j}}\right).\end{aligned}\quad (3.357)$$

が得られる。これらを再び作用に代入すると、

$$\begin{aligned}
 & - K_{i\bar{j}} g_{\mu\nu} \partial\phi^i \partial\phi^{*\bar{j}} \\
 & - e^{(k^2/2)K} \left[K^{i\bar{j}} \left(W_i + \frac{k^2}{2} W K_i \right) \left(W_{\bar{j}}^* + \frac{k^2}{2} W^* K_{\bar{j}} \right) - \frac{3k^2}{2} W W^* \right] \quad (3.358)
 \end{aligned}$$

が得られるが、これは以前にワイル変換を行って得られた作用である。このように、 $U(1)$ 超空間を用いると、カノニカルな運動項をもつ作用がワイル変換を行うことなく直接得られる。

第4章 テンソル計算法

4.1 ゲージ変換と一般座標変換

パラメータ ϵ^X が時空座標に依存するような内部対称性のゲージ変換

$$\delta_{\text{gauge}}(\epsilon) = \epsilon^X O_X \quad (4.1)$$

を考えよう。 X は代数の生成子をラベルする添え字であり、 ϵ^X は X に依存してボゾンのでもフェルミオンのでもありえる。 O_X というのは演算子ではなく変換記号である。上式の右辺は「 O_X で変換して ϵ^X をかける」という意味ではなく「 ϵ^X による変換」を表している。この二つは線形に変換される物質場に対しては同じことであるが、後で見るようにゲージ場の変換や場の微分を含む式の変換などを考えるときに違いが現れる。構造定数は次のように定義する。

$$\{O_X, O_Y\} = f_{XY}{}^Z O_Z. \quad (4.2)$$

物質場 Φ の次の線形変換を考えよう。

$$\delta_{\text{gauge}}(\epsilon)\Phi = \epsilon^X O_X \Phi = -\epsilon^X T_X \Phi \quad (4.3)$$

T_X は物質場に作用する線形演算子である。このような変換則に従う物質場に対して、次の共変微分を定義する。

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - V_\mu^X O_X \Phi \quad (4.4)$$

V_μ^X は変換 O_X に対応するゲージ場である。(以前にコンパクトな内部対称性に対する共変微分は $D_\mu^{(G)} \phi = (\partial_\mu - iA_\mu^a T_a) \phi$ と定義していたが、ここでは虚数単位 i が現れないような定義を用いる。) ゲージ場 V_μ^X のゲージ変換則は物質場 Φ の共変微分がゲージ変換のもとで Φ と同様に変換されること、すなわち、次の式が成り立つことを要請して決定される。

$$\delta_{\text{gauge}}(\epsilon)(\mathcal{D}_\mu \Phi) = -\epsilon^X T_X \mathcal{D}_\mu \Phi \quad (4.5)$$

この要請より、ゲージ場 V_μ^X のゲージ変換性が次のように決まる。

$$\delta_{\text{gauge}}(\epsilon)V_\mu^X = \epsilon^X O_X V_\mu^Z = \mathcal{D}_\mu \epsilon^Z. \quad (4.6)$$

ただし、変換パラメータの共変微分は次のように定義される。

$$\mathcal{D}_\mu \epsilon^X = \partial_\mu \epsilon^X + \epsilon^Y V_\mu^X f_{XY}^Z \quad \text{or} \quad (\mathcal{D}\epsilon^X)T_X = (\partial_\mu \epsilon^X)T_X + [V_\mu^X T_X, \epsilon^Y T_Y] \quad (4.7)$$

中間の表式の第2項における ϵ^Y と V_μ^X の順序に注意しよう。このように書いておけば添え字 X や Y が表す生成子の統計性に伴う符号を挿入しなくて済む。上で述べたように、ゲージ場の変換則 (4.6) においては、 $\epsilon^X O_X$ を「 O_X で変換して ϵ^X をかける」と解釈できないので注意すること。

曲率テンソル (場の強さ) は、共変微分の交換関係を用いて次のように定義する。

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = -R_{\mu\nu}^X O_X \Phi = R_{\mu\nu}^X T_X \Phi \quad (4.8)$$

共変微分の定義式 (4.4) を用いれば (線形演算子を用いた表式と変換記号を用いた表式のどちらを使っても) 次の式が得られる。

$$R_{\mu\nu}^X = \partial_\mu V_\nu^X - \partial_\nu V_\mu^X + V_\nu^Y V_\mu^X f_{XY}^Z. \quad (4.9)$$

曲率テンソルのゲージ変換は、(4.8) の両辺を変換してみることににより

$$\delta_{\text{gauge}}(\epsilon)R_{\mu\nu}^Z = \epsilon^Y R_{\mu\nu}^X f_{XY}^Z \quad (4.10)$$

と得られる。

恒等式 ($[D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]]\Phi|_{[\lambda\mu\nu]} = 0$ の内側の交換関係を (4.8) によって曲率テンソルで置き換えれば、次のビアンキ項等式が得られる。

$$D_\lambda R_{\mu\nu}^X|_{[\lambda\mu\nu]} = 0. \quad (4.11)$$

超重力理論を構成する上で、ゲージ変換とともに重要なのが一般座標変換である。次の無限小一般座標変換を考えよう。

$$x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu, \quad (4.12)$$

この変換に伴う場の変換則を決定する際に、場を持つ大域座標の添え字についてのみ適当な変換行列を作用させ、内部対称性については何も考慮しないような変換を $\delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\mu)$ と表すことにする。 $\delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\mu)$ はスカラー場に対して次のように作用する。

$$\delta_{\text{gc}}^0 \Phi = \epsilon^\mu \partial_\mu \Phi. \quad (4.13)$$

ゲージ場については、下付きのベクトル添え字を持つので、その添え字に対する変換行列の作用を表す項が付け加わる。

$$\delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\mu)V_\mu = \epsilon^\lambda \partial_\lambda V_\mu + \frac{\partial \epsilon^\lambda}{\partial x^\mu} V_\lambda \quad (4.14)$$

δ_{gc}^0 変換は、内部対称性についてのゲージ変換のもとで共変ではない。例えば (4.13) に現れる微分は Φ が内部対称性のもとでどのような表現に属していても共変微分にはならないし変換 (4.14) にはゲージポテンシャルがゲージ場の強さの形で含まれていない。一般座標変換の下での変分のゲージ共変性を明らかな形にするために、ゲージ変換を組み合わせたゲージ共変な一般座標変換 δ_{gc} (0 を付けない) を次のように定義する。

$$\delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu) = \delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\mu) - \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^\kappa V_\kappa^Z) = \delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\mu) - \epsilon^\kappa V_\kappa^Z O_Z \quad (4.15)$$

最後の表式の第 2 項は中間に与えた表式を書き換えたものであり、 $\epsilon^\kappa V_\kappa^Z$ を変換パラメータとする O_Z 変換であることに注意。これは V_κ^Z をパラメータとする O_Z 変換を行った後に ϵ^κ を掛けたものとは一般には異なる。(例えば $\partial_\lambda \Phi$ を変換することを考えてみると、前者は $\epsilon^\kappa V_\kappa^Z$ 全体が微分の中に入るのに対して後者は V_κ^Z だけが微分の内側に入り、 ϵ^κ は微分の外側に残される。)

スカラー場およびゲージ場はこの変換の下で次のように変換される。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu)\Phi &= \epsilon^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi, \\ \delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu)V_\mu^Z &= \epsilon^\kappa R_{\kappa\mu}^Z \end{aligned} \quad (4.16)$$

どちらも共変性が明らかな形をしている。

ゲージ変換の交換関係は次のように与えられる。

$$[\delta_{\text{gauge}}(\epsilon_1^X), \delta_{\text{gauge}}(\epsilon_2^X)] = \epsilon_2^Y \epsilon_1^X f_{XY}^Z O_Z \quad (4.17)$$

ゲージ変換と一般座標変換の交換関係は

$$[\delta_{\text{gauge}}(\epsilon^X), \delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\lambda)] = \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^\lambda \partial_\lambda \epsilon^X) \quad (4.18)$$

これは次のものに一致する。

$$[\delta_{\text{gauge}}(\epsilon^X), \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^\lambda V_\lambda^X)] = \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^\lambda \partial_\lambda \epsilon^X) \quad (4.19)$$

この交換関係を計算する際には、 $\delta_{\text{gauge}}(\epsilon^X)$ が変換 $\delta_{\text{gauge}}(\epsilon^\lambda V_\lambda^X)$ のパラメータに含まれるゲージ場にも作用することに注意しなければならない。

一般座標変換とゲージ変換の交換関係は次のように与えられる。

$$[\delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu), \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^X)] = 0, \quad (4.20)$$

$$[\delta_{\text{gc}}(\epsilon_1^\mu), \delta_{\text{gc}}(\epsilon_2^\mu)] = \delta_{\text{gc}}(\epsilon_{12}^\kappa) - \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu R_{\mu\nu}^Z O_Z. \quad (4.21)$$

ただし、 ϵ_{12}^μ は次のように定義される。

$$\epsilon_{12}^\kappa = \epsilon_2^\lambda \partial_\lambda \epsilon_1^\kappa - \epsilon_1^\lambda \partial_\lambda \epsilon_2^\kappa \quad (4.22)$$

4.2 代数の変形

大域的な場合にテンソル計算法を用いてどのように超対称多重項を構成するかについては以前に述べた。ここではこの構成法を超重力理論へ拡張することを考える。

テンソル計算法を超重力理論へ拡張するには、まず始めに超対称代数を局所化したゲージ理論を定義する。この段階ではゲージ化された超対称代数はそのままでは純粋な内部対称性であるという点であって、例えば超対称代数に含まれる P_m 変換は時空の並進とは無関係な変換である。

大域的超対称理論において、 P_m 変換と時空の並進を関係付けるのは、初項に対して設定された変換則 (1.79) の第 1 式 $P_m B = \partial_m B$ である。超対称代数を用いれば、任意の場に対してこの関係式が成り立つことが示され、 P_m が全ての場に対して並進演算子として作用することがわかる。

時空が曲がっている場合にも、局所的には P_m 変換は並進を引き起こす演算子であるとみなすことができると仮定すると、任意の場 Φ に対して次のように置くのが自然であるように思われる。

$$e_\mu^m P_m \Phi = D'_\mu \Phi. \quad (4.23)$$

$D'_\mu \Phi$ は場 Φ に対して作用する内部対称性に対して定義された共変微分であるが、 P_m 変換に対する共変化は考慮されていないものである。ここで、 P_m も内部対称性だとみなし、 e_μ^m を対応するゲージ場であるとみなせば、(4.23) は P_m 変換についての共変化も含めた完全な共変微分 $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - e_\mu^m P_m - \dots$ を用いて次のように表すことができる。

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = 0. \quad (4.24)$$

あるいはこれは、 P_m 変換についても共変化した一般座標変換のもとでの変分が 0 であると解釈することもできる。

$$\delta_{\text{gc}} \Phi = 0. \quad (4.25)$$

(4.24) は物質場に対してのみ適用できる式であるが、(4.25) はゲージ場も含めた任意の場に対して課される式であると解釈できる。物質場のなす超対称多重項については、初項に対して (4.24) を要請しておけば、 \mathcal{D}_μ が共変であるということから、そのほかの成分も全て (4.24) を満足することが保障される。

しかし、これだけではまだ問題が残されている。(4.24) に対してもう一つ微分を作用させ、交換関係をとると、次の式が得られる。

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \Phi = -R_{\mu\nu}^X O_X \Phi = 0. \quad (4.26)$$

ここで、 O_X はゲージ化した対称性の変換を表し、 $R_{\mu\nu}^X$ は対応する場の強さである。これが任意の場の上で成り立つとすれば、 $R_{\mu\nu}^X = 0$ が成り立つことになる。同様の式はゲージ場に対して (4.25) を課することによっても得られる。

$$\delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu) V_\mu^X = \epsilon^\lambda R_{\lambda\mu}^X = 0. \quad (4.27)$$

これも全ての曲率が 0 であることを要求している。

これらの問題は、内部対称性の変換則がそのまま変更を受けないとすればどうしても逃れることができない。しかし、場の変換則をうまく変形することにより、一部の曲率については 0 でない値が許されるようにすることができる。ここでは簡単な例として、ポアンカレ代数のゲージ理論から出発し、ゲージ場の変換則を変形することで重力理論を構成することを考えてみよう。ポアンカレ代数は交換関係

$$\begin{aligned} [M_{mn}, M_{pq}] &= M_{mq}\eta_{np} - M_{mp}\eta_{nq} - M_{nq}\eta_{mp} + M_{np}\eta_{mq}, \\ [M_{mn}, P_p] &= P_m\eta_{np} - P_n\eta_{mp}, \\ [P_m, P_n] &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

を満足する生成子 P_m と M_{mn} を含む。これらに対応するゲージ場 e_μ^m と ω_μ^{mn} を次のように導入する。

$$V_\mu^X O_X = e_\mu^m P_m + \frac{1}{2} \omega_\mu^{mn} M_{mn} \quad (4.29)$$

ゲージ場 e_μ^m と ω_μ^{mn} に対する共変な一般座標変換は (4.16) より次のように得られる。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gc}}(\epsilon^\kappa) e_\mu^m &= \epsilon^\kappa R_{\kappa\mu}^m(P), \\ \delta_{\text{gc}}(\epsilon^\kappa) \omega_\mu^{mn} &= \epsilon^\kappa R_{\kappa\mu}^{mn}(M). \end{aligned} \quad (4.30)$$

この右辺を 0 にしたい。ひとつの選択肢は

$$R_{\kappa\mu}^m(P) = R_{\kappa\mu}^{mn}(M) = 0 \quad (4.31)$$

と置くことである。これらの拘束条件は明らかに全てのゲージ場の上で (4.25) が成り立つことを保障する。しかしながらこの条件は重力の自由度を完全に取り去り、平坦な背景時空を考えることを意味しているから、我々がほしいものではない。

我々が欲しい重力理論は、曲率テンソル $R(M)$ の自由度が残り、また、スピン接続 ω_μ が e_μ の複合場として与えられるようなものである。この条件を満足するために、 $R_{\mu\nu}^m(P)$ についてだけ以下の拘束条件を課すことを考えよう。

$$R_{\mu\nu}^m(P) = 0. \quad (4.32)$$

P に対する曲率テンソルは、捩率テンソルに他ならない。

$$R_{\mu\nu}^k(P) = T_{\mu\nu}^k = D_\mu^{(\omega)} e_\nu^k - D_\nu^{(\omega)} e_\mu^k \quad (4.33)$$

従ってこの拘束条件を解くことにより ω を e の複合場として与えることができる。さらに、上記の拘束条件はゲージ不変ではない。 $R(P)$ のゲージ変換則は

$$\delta_{\text{gauge}} R_{\mu\nu}^m(P) = R_{\mu\nu}^m{}_n(M) \epsilon^n + R_{\mu\nu}^n(P) \lambda_n^m, \quad (4.34)$$

となり、第2項は拘束条件により0になるが、第1項は $R(M)$ を0とするような拘束条件を置いていないために一般に0ではない。このことは、拘束条件を解いて得られる複合場 $\omega = \omega(e)$ のゲージ変換則はもとの独立場 ω のゲージ変換とは一致しないことを意味している。 ω を e の複合場とみなしたときの e に対する変換則から誘導される変換則を補正されたゲージ変換とよび $\delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}}$ とよび、それともとの独立場としての ω のゲージ変換 δ_{gauge} との差を δ'_{gauge} としよう。

$$\delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}} = \delta_{\text{gauge}} + \delta'_{\text{gauge}} \quad (4.35)$$

ゲージ変換の補正 δ'_{gauge} を実際に計算するには、拘束条件は修正されたゲージ変換 $\delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}}$ で不変であるという事実を用いればよい。(これは定義より明らかである。) 実際に変換してみると、次の関係式が得られる。

$$0 = \delta_{\text{gauge}} R_{\mu\nu}{}^m(P) + \delta'_{\text{gauge}} R_{\mu\nu}{}^m(P) = R_{\mu\nu}{}^{mn}(M)\epsilon_n + \delta'\omega_{\mu}{}^{mn}e_{\nu n} - \delta'\omega_{\nu}{}^{mn}e_{\mu n} \quad (4.36)$$

これを解いて得られる変換則の補正は

$$\begin{aligned} \delta'_{\text{gauge}}\omega_{\mu pq} &= \frac{1}{2}(-R_{pq\mu n}(M) + R_{q\mu pn}(M) + R_{\mu pqn}(M))\epsilon^n \\ &= \epsilon^m e_m{}^\nu R_{\nu\mu pq}(M) \end{aligned} \quad (4.37)$$

最後の形に変形するために換率が (4.32) により0であることから従うビアンキ恒等式を用いた。

こうして ω に対する変換則の補正が求められた。これは ω に対する(共変化された)一般座標変換にも次のように影響する。

$$\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}}(\epsilon^\kappa)\omega_{\mu}{}^{mn} = \delta_{\text{gc}}(\epsilon^\kappa)\omega_{\mu}{}^{mn} - \delta'_{\text{gauge}}(e^\mu e_\mu^m)\omega_{\mu}{}^{mn} \quad (4.38)$$

この右辺にもともとの一般座標変換 (4.30) とゲージ変換の補正 (4.37) を代入すると

$$\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}}(\epsilon^\kappa)\omega_{\mu}{}^{mn} = 0 \quad (4.39)$$

が得られる。すなわち、拘束条件 (4.32) と、それによる ω の変換則の補正を考慮すれば、条件式 (4.25) は満足される。

P 変換が拘束条件によって変形されたため、代数の構造も変化する。 ω は e の複合場として表されているから、 e の上で交換関係を計算すれば十分である。その結果、以下の交換関係を得る。

$$\begin{aligned} [M_{mn}, M_{pq}] &= M_{mq}\eta_{np} - M_{mp}\eta_{nq} - M_{nq}\eta_{mp} + M_{np}\eta_{mq}, \\ [M_{mn}, P_p^{\text{mod}}] &= P_m^{\text{mod}}\eta_{np} - P_n^{\text{mod}}\eta^{mp}, \\ [P_p^{\text{mod}}, P_q^{\text{mod}}] &= -\frac{1}{2}R_{pq}{}^{mn}M_{mn}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

(4.28) と比較すると、 P^{mod} 同士の交換関係がもとの P 同士の交換関係と異なり、しかも、構造定数は場の強さに依存している。

さらに、共変微分も補正されたゲージ変換を用いて

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{mod}} = \partial_\mu - e_\mu^m P_m^{\text{mod}} - \frac{1}{2} \omega_\mu^{mn} M_{mn} \quad (4.41)$$

を定義すれば、この共変微分の交換関係は

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu^{\text{mod}}, \mathcal{D}_\nu^{\text{mod}}] &= [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] + \frac{1}{2} e_\mu^m (P'_m \omega_\nu^{pq}) M_{pq} - \frac{1}{2} e_\nu^m (P'_m \omega_\mu^{pq}) M_{pq} + \frac{1}{2} e_\mu^m e_\nu^n [P'_m, P'_n] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

となり、物質場に対して (4.24) の共変微分を $\mathcal{D}_\mu^{\text{mod}}$ に置き換えた拘束条件

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{mod}} \Phi = 0 \quad (4.43)$$

を課すことができる。こうして独立なゲージ場 e_μ^m とその複合場である ω_μ^{pq} によって重力理論を構成し、さらに曲がった時空上の物質場を拘束条件 (4.43) を満足する場として導入することができる。

以下では、同様の手続きを用いて、超重力理論を構成する。

4.3 超コンフォーマル代数

前節で行ったのと同様な方法で超重力理論を構成することができる。その際に超ポアンカレ代数を局所化して得られるゲージ理論から出発するのが自然なように思われる。しかしながら実際にやってみると、条件 (4.25) を実現するために導入した拘束条件がグラビティーノの運動方程式を与えてしまい、off-shell の定式化を行うには都合が悪い。そこで代数を拡大し、超コンフォーマル代数から出発することにする。代数が拡大されたことのご利益がどこにあるのかは、実際に拘束条件を与えていく過程で述べることにする。

まずは出発点となる代数を与えておこう。

$$\begin{aligned}
[M_{mn}, M_{pq}] &= M_{mq}\eta_{np} - M_{mp}\eta_{nq} - M_{nq}\eta_{mp} + M_{np}\eta_{mq}, \\
[M_{mn}, P_p] &= P_m\eta_{np} - P_n\eta_{mp}, \\
[M_{mn}, K_p] &= K_m\eta_{np} - K_n\eta_{mp}, \\
[M_{mn}, Q_a] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{mn})_a{}^b Q_b, \\
[M_{mn}, S_a] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{mn})_a{}^b S_b \\
[D, P_m] &= P_m, \\
[D, Q_a] &= \frac{1}{2}Q_a, \\
[D, S_a] &= -\frac{1}{2}S_a, \\
[D, K_m] &= -K_m \\
[A, Q_a] &= -i(\gamma^5)_a{}^b Q_b, \\
[A, S_a] &= i(\gamma^5)_a{}^b S_b, \\
[P_m, K_n] &= 2(M_{mn} + \delta_{mn}D) \\
[S_a, P_m] &= -(\gamma_m)_a{}^b Q_b, \\
[Q_a, K_m] &= -(\gamma_m)_a{}^b S_b, \\
\{Q_a, Q_b\} &= -2(\gamma^m)_{ab}P_m, \\
\{S_a, S_b\} &= -2(\gamma^m)_{ab}K_m \\
\{S_a, Q_b\} &= -(\gamma^{mn})_{ab}M_{mn} + 2C_{ab}D - 3i(\gamma^5)_{ab}A \quad (4.44)
\end{aligned}$$

それぞれの生成子に対するゲージ場と変換パラメータを次のように導入しよう。スピノル添え字の位置と M_{mn} 項の係数 $1/2$ に注意。

$$\begin{aligned}
V_\mu{}^X O_X &= e_\mu{}^m P_m + \psi_\mu{}^a Q_a + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn} M_{mn} + w_\mu D + c_\mu A + \phi_\mu{}^a S_a + f_\mu{}^m K_m, \\
\delta_{\text{gauge}}(\epsilon^X) &= \epsilon^X O_X = \epsilon^m P_m + \xi^a Q_a + \frac{1}{2}\lambda^{mn} M_{mn} + \sigma D + \theta A + \zeta^a S_a + \epsilon_{K^m}^m \quad (4.45)
\end{aligned}$$

曲率にはすべて R を用い、そのあとにカッコつきで対応する生成子を書くことで成分を区別する。

$$R_{\mu\nu}{}^X = R_{\mu\nu}{}^k(P), R_{\mu\nu}{}^a(Q), R_{\mu\nu}{}^{pq}(M), R_{\mu\nu}(D), R_{\mu\nu}(A), R_{\mu\nu}{}^a(S), R_{\mu\nu}{}^k(K) \quad (4.46)$$

積 $R^X O_X$ は (4.45) と同様に定義される。曲率を成分で書いたものを与えておこう。

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^k(P) &= \partial_\mu e_\nu{}^k - \partial_\nu e_\mu{}^k + \omega_\mu{}^k{}_m e_\nu{}^m - \omega_\nu{}^k{}_m e_\mu{}^m \\
&\quad + w_\mu e_\nu{}^k - w_\nu e_\mu{}^k + 2\psi_\mu{}^a (\gamma^k)_{ab} \psi_\nu{}^b, \\
R_{\mu\nu}{}^a(Q) &= \partial_\mu \psi_\nu{}^a - \partial_\nu \psi_\mu{}^a - \frac{1}{4} \omega_{\mu pq} (\gamma^{pq})^a{}_b \psi_\nu{}^b + \frac{1}{4} \omega_{\nu pq} (\gamma^{pq})^a{}_b \psi_\mu{}^b \\
&\quad + \frac{1}{2} w_\mu \psi_\nu{}^a - \frac{1}{2} w_\nu \psi_\mu{}^a + i c_\mu (\gamma^5)^a{}_b \psi_\nu{}^b - i c_\nu (\gamma^5)^a{}_b \psi_\mu{}^b \\
&\quad - \phi_\mu{}^b e_\nu{}^m (\gamma_m)_{ba} + \phi_\nu{}^b e_\mu{}^m (\gamma_m)_{ba}, \\
R_{\mu\nu}{}^{mn}(M) &= \partial_\mu \omega_\nu{}^{mn} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{mn} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{mn} \\
&\quad + 2e_\mu{}^m f_\nu{}^n - 2e_\nu{}^m f_\mu{}^n - 2e_\mu{}^n f_\nu{}^m + 2e_\nu{}^n f_\mu{}^m \\
&\quad + 2\phi_\mu{}^a (\gamma^{mn})_{ab} \psi_\nu{}^b - 2\phi_\nu{}^a (\gamma^{mn})_{ab} \psi_\mu{}^b, \\
R_{\mu\nu}(D) &= \partial_\mu w_\nu - \partial_\nu w_\mu + 2e_\mu{}^m f_{\nu m} - 2e_\nu{}^m f_{\mu m} \\
&\quad - 2\phi_\mu{}^a C_{ab} \psi_\nu{}^b + 2\phi_\nu{}^a C_{ab} \psi_\mu{}^b, \\
R_{\mu\nu}(A) &= \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu + 3i\phi_\mu{}^a (\gamma^5)_{ab} \psi_\nu{}^b - 3i\phi_\nu{}^a (\gamma^5)_{ab} \psi_\mu{}^b, \\
R_{\mu\nu}{}^a(S) &= \partial_\mu \phi_\nu{}^a - \partial_\nu \phi_\mu{}^a - \frac{1}{4} \omega_{\mu pq} (\gamma^{pq})^a{}_b \phi_\nu{}^b + \frac{1}{4} \omega_{\nu pq} (\gamma^{pq})^a{}_b \phi_\mu{}^b \\
&\quad - \frac{1}{2} w_\mu \phi_\nu{}^a + \frac{1}{2} w_\nu \phi_\mu{}^a - i c_\mu (\gamma^5)^a{}_b \phi_\nu{}^b + i c_\nu (\gamma^5)^a{}_b \phi_\mu{}^b \\
&\quad - \psi_\mu{}^b e_\nu{}^m (\gamma_m)_{ba} + \psi_\nu{}^b e_\mu{}^m (\gamma_m)_{ba}, \\
R_{\mu\nu}{}^k(K) &= \partial_\mu f_\nu{}^k - \partial_\nu f_\mu{}^k + \omega_\mu{}^k{}_m f_\nu{}^m - \omega_\nu{}^k{}_m f_\mu{}^m \\
&\quad - w_\mu f_\nu{}^k + w_\nu f_\mu{}^k + 2\phi_\mu{}^a (\gamma^k)_{ab} \phi_\nu{}^b. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

それぞれのゲージ場に対する変換則をまとめておこう。

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{gauge}} e_\mu^m &= \partial_\mu \epsilon^m + \omega_\mu^m{}_n \epsilon^n + e_\mu^n \lambda_n^m + w_\mu \epsilon^m - e_\mu^m \sigma + 2\psi_\mu^a (\gamma^m)_{ab} \xi^b, \\
\delta_{\text{gauge}} \psi_\mu^a &= \partial_\mu \xi^a - \frac{1}{4} \omega_\mu^{pq} (\gamma_{pq})^a{}_b \xi^b + \frac{1}{2} w_\mu \xi^a - i c_\mu \xi^b (\gamma^5)_b{}^a \\
&\quad + \frac{1}{4} \psi_\mu^b \lambda^{pq} (\gamma_{pq})_b{}^a - \frac{1}{2} \psi_\mu^a \sigma + i \psi_\mu^b (\gamma^5)_b{}^a \theta \\
&\quad - \phi_\mu^\beta \epsilon^m (\gamma_m)_b{}^a + e_\mu^m \zeta^b (\gamma_m)_b{}^a, \\
\delta_{\text{gauge}} \omega_\mu^{pq} &= \partial_\mu \lambda^{pq} + [\omega_\mu, \lambda]^{pq} + 2e_\mu^m \epsilon_K^n - 2e_\mu^n \epsilon_K^m - 2f_\mu^m \epsilon^n + 2f_\mu^n \epsilon^m \\
&\quad + 2\phi_\mu^a \xi^b (\gamma^{pq})_{ab} + 2\psi_\mu^a \zeta^b (\gamma^{pq})_{ab}, \\
\delta_{\text{gauge}} w_\mu &= \partial_\mu \sigma + 2e_\mu^m \epsilon_{Km} - 2f_\mu^m \epsilon_m - 2\phi_\mu^a \xi^b C_{ab} + 2\psi_\mu^a \zeta^b C_{ab}, \\
\delta_{\text{gauge}} c_\mu &= \partial_\mu \theta + 3i\phi_\mu^a \xi^b (\gamma^5)_{ab} - 3i\psi_\mu^a \zeta^b (\gamma^5)_{ab}, \\
\delta_{\text{gauge}} \phi_\mu^a &= \partial_\mu \zeta^a - \frac{1}{4} \omega_\mu^{pq} (\gamma_{pq})^a{}_b \zeta^b - \frac{1}{2} w_\mu \zeta^a + i c_\mu \zeta^b (\gamma^5)_b{}^a \\
&\quad + \frac{1}{4} \phi_\mu^b \lambda^{pq} (\gamma_{pq})_b{}^a + \frac{1}{2} \phi_\mu^a \sigma - i \phi_\mu^b (\gamma^5)_b{}^a \theta \\
&\quad - \psi_\mu^b \epsilon_K^m (\gamma_m)_b{}^a + f_\mu^m \xi^b (\gamma_m)_b{}^a, \\
\delta_{\text{gauge}} f_\mu^m &= \partial_\mu \epsilon_K^m + \omega_\mu^m{}_n \epsilon_K^n + f_\mu^n \lambda_n^m - w_\mu \epsilon_K^m + f_\mu^m \sigma + 2\phi_\mu^a (\gamma^m)_{ab} \zeta^b. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

あとの計算では、MDA 変換についての次の共変微分を定義しておくとう便利である。

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(MDA)} e_\nu^k &= \partial_\mu e_\nu^k + \omega_\mu^k{}_m e_\nu^m + w_\mu e_\nu^k \\
D_\mu^{(MDA)} \psi_\nu &= \partial_\mu \psi_\nu + \frac{1}{4} \omega_{\mu pq} \gamma^{pq} \psi_\nu + \frac{1}{2} w_\mu \psi_\nu - i c_\mu \gamma^5 \psi_\nu \\
D_\mu^{(MDA)} \phi_\nu &= \partial_\mu \phi_\nu + \frac{1}{4} \omega_{\mu pq} \gamma^{pq} \phi_\nu - \frac{1}{2} w_\mu \phi_\nu + i c_\mu \gamma^5 \phi_\nu \\
D_\mu^{(MDA)} f_\nu^k &= \partial_\mu f_\nu^k + \omega_\mu^k{}_m f_\nu^m - w_\mu f_\nu^k \tag{4.49}
\end{aligned}$$

何も書かれていない共変微分 D_μ は、スピノ接続項のみを含むものである。さらに、次の反対称テンソルを定義しておく。

$$T_{\mu\nu}^k = D_\mu e_\nu^k - D_\nu e_\mu^k, \quad T_{\mu\nu}^{(MDA)k} = D_\mu^{(MDA)} e_\nu^k - D_\nu^{(MDA)} e_\mu^k, \tag{4.50}$$

$$\psi_{\mu\nu} = D_\mu \psi_\nu - D_\nu \psi_\mu, \quad \psi_{\mu\nu}^{(MDA)} = D_\mu^{(MDA)} \psi_\nu - D_\nu^{(MDA)} \psi_\mu, \tag{4.51}$$

$$\phi_{\mu\nu} = D_\mu \phi_\nu - D_\nu \phi_\mu, \quad \phi_{\mu\nu}^{(MDA)} = D_\mu^{(MDA)} \phi_\nu - D_\nu^{(MDA)} \phi_\mu, \tag{4.52}$$

$$f_{\mu\nu}^k = D_\mu f_\nu^k - D_\nu f_\mu^k, \quad f_{\mu\nu}^{(MDA)k} = D_\mu^{(MDA)} f_\nu^k - D_\nu^{(MDA)} f_\mu^k. \tag{4.53}$$

この反対称テンソルを用いて MDA 以外の曲率テンソルが次のように書ける。

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^k(P) &= T_{\mu\nu}^{(MDA)k} - 2(\psi_\mu \gamma^k \psi_\nu), \\
R_{\mu\nu}(Q) &= \psi_{\mu\nu}^{(MDA)} - \gamma_\mu \phi_\nu + \gamma_\nu \phi_\mu \\
R_{\mu\nu}(S) &= \phi_{\mu\nu}^{(MDA)} - \gamma_\mu \psi_\nu + \gamma_\nu \psi_\mu, \\
R_{\mu\nu}^k(K) &= f_{\mu\nu}^{(MDA)k} - 2(\phi_\mu \gamma^k \phi_\nu). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

4.4 拘束条件と変換則の補正

前の節で導入した超コンフォーマル代数のゲージ対称性はこのままでは重力とは無関係の内部対称性である。このゲージ理論を重力理論に変形するには、§4.2 でポアンカレ代数の場合に行ったように、拘束条件を用いて幾つかのゲージ場を複合場として表し、それに伴うゲージ変換則の補正を決定し、これらを考慮した結果条件式 (4.25) が満足されるようにしなければならない。どのような拘束条件を置き、どの場を複合場として与えるかということはアプリアリには決まらず、試行錯誤が必要となるが、ここでは一から全てを決めることはせず、うまく行くことがすでに分かっている [37] 以下の方針に従って拘束条件を決めていく。

- e, ψ, w, c を独立場とし、 ω, ϕ, f をそれらの複合場として与える。
- 全ての場に対して M, D, A, S, K 変換は補正を受けない。すなわち、これから与えられる拘束条件の組はこれらの変換のもとで不変である。
- Q 変換は複合場についてのみ補正を与える。この補正は拘束条件に対する Q 変換より求められる。
- P 変換は Q 変換の交換関係によって定義する。すなわち

$$\{Q_a^{\text{mod}}, Q_b^{\text{mod}}\} = -2(\gamma^m)_{ab} P_m^{\text{mod}} \quad (4.55)$$

が成り立つとする。独立場の Q 変換は複合場を含む可能性があるため、このように定義された P 変換は独立場に対しても補正される可能性がある。

§4.2 で説明したように、 P 変換を一般座標変換関連付けるためには次の条件が全ての場の上で成り立つ必要がある。

$$\delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu) = 0 \quad (4.56)$$

これが全ての場の上で成り立つことを要請する。

まずはゲージ場 e_μ^m に対する条件 $\delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu) e_\mu^m = 0$ について考えよう。上記の仮定を用いると、 e_μ^m の上では P_m 変換も含む全てのゲージ変換が補正を受けないことがわかる。従って、一般座標変換 $\delta_{\text{gc}} \epsilon^\mu = \epsilon^\lambda R_{\lambda\mu}{}^m(P)$ も補正をうけない。従って (4.56) を満足するには次の条件を置くことが必要である。

$$R_{\mu\nu}{}^m(P) = 0 \quad (4.57)$$

この拘束条件が最初に仮定したように $MDASK$ 変換のもとで不変であることは直ちに確認できる。(4.57) を解くことにより、 ω を複合場として与えることができる。

$$\omega_{\kappa\mu\nu} = \omega_{\kappa\mu\nu}(e) + [\psi_\mu \gamma_\kappa \psi_\nu - \psi_\nu \gamma_\mu \psi_\kappa - \psi_\kappa \gamma^\nu \psi_\mu] - w_\mu e_{\nu\kappa} + w_\nu e_{\mu\kappa} \quad (4.58)$$

$\omega(e)$ は (2.10) に与えられた、 e_μ^m だけで書かれたスピン接続である。

拘束条件 (4.57) は Q 変換のもとで不変ではないので、 ω の Q 変換は補正を受ける。補正を決定するために、 $\delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}}$ が拘束条件を変化させないことを用いる。曲率テンソルのゲージ変換則 (4.10) と曲率テンソルの具体形 (4.47) を用いれば次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{\text{gauge}}^{\text{ori}} R_{\mu\nu}{}^m(P) + \delta'_{\text{gauge}} R_{\mu\nu}{}^m(P) \\ &= 2R_{\mu\nu}{}^a(Q)(\gamma^m)_{ab}\xi^b + \delta'_{\text{gauge}}\omega_\mu{}^k{}_m e_\nu{}^m - \delta'_{\text{gauge}}\omega_\nu{}^k{}_m e_\mu{}^m \end{aligned} \quad (4.59)$$

この式を $\delta'_{\text{gauge}}\omega_{\lambda\mu\nu}$ について解くと、

$$\delta'_{\text{gauge}}\omega_{\mu pq} = -R_{pq}{}^a(Q)(\gamma_\mu)_{ab}\xi^b + R_{q\mu}{}^a(Q)(\gamma_p)_{ab}\xi^b + R_{\mu p}{}^a(Q)(\gamma_q)_{ab}\xi^b \quad (4.60)$$

ω の変換則が決定されたので、(4.55) を用いて ψ_μ の P^{mod} 変換を決定することができる。 ψ_μ^a の上で Q^{mod} 同士の交換関係を計算してみると、

$$\begin{aligned} [\xi_1 Q^{\text{mod}}, \xi_2 Q^{\text{mod}}]\psi_\mu^a &= 2(\xi_1 \gamma^m \xi_2) P_m \psi_\mu^a \\ &\quad - \frac{1}{8}(-\gamma^{pq}\gamma^k \gamma_\mu R_{pq}(Q) + 2\gamma^{pq}\gamma^k \gamma_p R_{q\mu}(Q))(\xi_1 \gamma_k \xi_2) \\ &\quad + \frac{1}{16}(-\gamma^{pq}\gamma^{kl}\gamma_\mu R_{pq}(Q) + 2\gamma^{pq}\gamma^{kl}\gamma_p R_{q\mu}(Q))(\xi_1 \gamma_k \xi_2) \end{aligned} \quad (4.61)$$

この式の右辺を $2(\xi_1 \gamma^m \xi_2) P_m \psi_\mu^a$ と解釈したいのであるが、そのためには最後の行の $(\xi_1 \gamma_{kl} \xi_2)$ を含む項は 0 でなければならない。そのための必要十分条件は、曲率テンソル $R(Q)$ が次の条件を満足することである。

$$(\gamma^m)^a{}_b e_m{}^\mu R_{\mu\nu}{}^b(Q) = 0 \quad (4.62)$$

そこで、これを二番目の拘束条件として採用しよう。この拘束条件が最初に仮定したように MDASK 変換のもとで不変であることはすぐに示すことができる。

超共形代数ではなく、超ポアンカレ代数から出発した場合に問題が生じるのはこの時点である。超ポアンカレ代数の場合、曲率 $R(Q)$ はグラビティーノの場の強さであり、拘束条件 (4.62) はグラビティーノの運動方程式を与える。これは off-shell の定式化を行ううえでは都合が悪い。一方超コンフォーマル代数の場合には $R(Q)$ は S_a 変換に対応するゲージ場 ϕ_μ^a を代数的に含んでいるために、 ϕ_μ^a を複合場として与える式であると解釈することができる。(実際、拘束条件の成分の数は ϕ_μ^a の成分の数に一致している。) ϕ_μ を複合場として与える式はあとで与えることにして、 ψ_μ の P 変換の補正の導出に戻ろう。拘束条件 (4.62) を用いると、(4.61) の三行目は消え、2 行目も簡単な形にまとまり、 ψ_μ に対する次の P^{mod} 変換を得る。

$$\epsilon^k P'_k \psi_\mu = \epsilon^k R_{k\mu}(Q) \psi_\mu \quad (4.63)$$

同時に、(4.60) に与えた ω の Q 変換に対する補正も拘束条件 (4.62) を用いて次のように簡単な形に書き換えることができる。

$$\xi^a Q'_a \omega_{\mu pq} = -2(\xi \gamma_\mu R_{pq}(Q)) \quad (4.64)$$

ψ に対する全てのゲージ変換が補正を含めて決定されたので、補正された一般座標変換を与えることができる。実は P 変換の補正 (4.63) を考慮すると、次のように (4.56) は成り立っていることが分かる。

$$\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}} \psi_\mu = \delta_{\text{gc}} \psi_\mu - \epsilon^\lambda e_\lambda^m P'_m \psi_\mu = 0. \quad (4.65)$$

さらに進む前に、 ω に対する Q 変換則が補正 (4.64) を受けることに伴い $R(M)$ の共変化 $R^{(c)}(M)$ を導入しておこう。 ω の変換則の補正 (4.64) の結果、曲率テンソルの変換則も変化し、変換パラメータの微分が現れる可能性がある。例えば、 δ' を $R_{\mu\nu}{}^X$ に作用させると、その中の $\partial_\mu V_\nu{}^X - \partial_\nu V_\mu{}^X$ に作用したときに変換パラメータ ξ の微分を含む項が現れる。

$$\delta' R_{\mu\nu}{}^X = \partial_\mu \delta' V_\nu{}^X - \partial_\nu \delta' V_\mu{}^X + \dots \quad (4.66)$$

このことは $\delta' R(M)$ が $\partial\xi$ を含んでしまうことを意味している。変換パラメータの微分は、対応するゲージ場（この場合には ψ ）の変換則中でだけ現れるのが望ましい。そこで、変換則中に ξ の微分が現れない $R^{(c)}(M)$ を次のように定義する。

$$R_{\mu\nu}^{(c)X} = R_{\mu\nu}{}^X - \psi_\mu^a Q'_a V_\nu{}^X + \psi_\nu^a Q'_a V_\mu{}^X \quad (4.67)$$

$R^{(c)}(M)$ は具体的に次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu pq}^{(c)}(M) = R_{\mu\nu pq}(M) - 2(R_{pq}{}^a(Q)(\gamma_\mu)_{ab}\psi_\nu{}^b - R_{pq}{}^a(Q)(\gamma_\nu)_{ab}\psi_\mu{}^b) \quad (4.68)$$

$R(Q)$ に対する拘束条件のために、スカラー曲率に対しては $R^{(c)}(M) = R(M)$ が成り立つ。

すでに述べたように、拘束条件 (4.62) を解くことによって ϕ_μ を複合場として与えることができる。

$$\begin{aligned} \phi_\nu &= \frac{1}{2}\gamma^\mu \psi_{\mu\nu}^{(MDA)} + \frac{1}{12}\gamma_\nu \gamma^{\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}^{(MDA)} \\ &= \frac{1}{2}\gamma^\mu \psi_{\mu\nu} + \frac{1}{12}\gamma_\nu \gamma^{\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{4}\gamma^\mu (w_\mu \psi_\nu - w_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{12}w_\rho \gamma_\nu \gamma^{\rho\sigma} \psi_\sigma \\ &\quad - \frac{i}{2}\gamma^\mu \gamma^5 (c_\mu \psi_\nu - c_\nu \psi_\mu) - \frac{i}{6}c_\rho \gamma_\nu \gamma^{\rho\sigma} \gamma^5 \psi_\sigma \end{aligned} \quad (4.69)$$

しばしば次の式も有用である。

$$\begin{aligned}\gamma^\nu \phi_\nu &= -\frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}^{(MDA)} \\ &= -\frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu}w_\mu\psi_\nu + \frac{i}{3}\gamma^5\gamma^{\mu\nu}c_\mu\psi_\nu\end{aligned}\quad (4.70)$$

拘束条件 (4.62) は Q 変換のもとで不変ではないために、 ϕ_μ の Q 変換も補正を受ける。この補正は $R(Q)$ についての拘束条件 (4.62) に $\delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}}$ を作用させて 0 になるはずであるという式から求めることができる。 $R(Q)$ 中の ω に δ' が作用して現れる項も忘れないようにして拘束条件を変換してみると次の式を得る。

$$-\frac{1}{4}R_{\mu\nu}^{(c)pq}(M)\gamma^\mu\gamma_{pq}\xi - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}(D)\gamma^\mu\xi - iR_{\mu\nu}(A)\gamma^5\gamma^\mu\xi - \gamma^\mu\gamma_\nu\delta'\phi_\mu + 4\delta'\phi_\nu = 0 \quad (4.71)$$

$R(Q)$ を含む項は全て $R(M)$ と組み合わせられて $R^{(c)}(M)$ の形にまとまる。これを解くことにより次の式を得る。

$$\begin{aligned}\delta'\phi_\nu &= \frac{1}{8}\gamma^\mu\gamma_{pq}\xi R_{\mu\nu}^{(c)pq}(M) + \frac{1}{48}\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\gamma_{pq}\xi R_{\kappa\lambda}^{(c)pq}(M) \\ &\quad + \frac{1}{4}\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(D) + \frac{1}{24}\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(D) \\ &\quad + \frac{i}{2}\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) + \frac{i}{12}\gamma^5\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(A)\end{aligned}\quad (4.72)$$

さらに (4.72) は §4.6 で与える曲率テンソルについての恒等式を用いることによって次の形に変形することができる。

$$\delta'\phi_\nu = \frac{1}{4}\gamma^q\xi R_{\nu q}^{(c)}(M) + \frac{i}{2}\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) + \frac{i}{12}\gamma^5\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(A) \quad (4.73)$$

ϕ の補正まで含めた Q 変換則が決定されたので、 c_μ および w_μ の上で二回 Q^{mod} 変換を行い P 変換に対する補正を計算することが可能となる。 c_μ については、補正 P' は次のように与えられる。

$$\epsilon^m P'_m c_\mu = \epsilon^q R_{q\mu}(A) \quad (4.74)$$

これは丁度一般座標変換則を修正し、 $\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}}c_\mu = 0$ を与える。一方 w_μ の上で Q^{mod} 変換を二回行って得られる P 変換の補正は

$$\epsilon^m P'_m w_\mu = \epsilon^q \left[\frac{1}{2}R_{\mu q}^{(c)}(M) - \frac{1}{6}\epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) \right] \quad (4.75)$$

であり、この補正を考慮した一般座標変換は次のように与えられる。

$$\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}}(\epsilon^\lambda)w_\mu = \epsilon^q R_{q\mu}(D) - \epsilon^q \left[\frac{1}{2}R_{\mu q}^{(c)}(M) - \frac{1}{6}\epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) \right], \quad (4.76)$$

したがって $\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}} w_\mu = 0$ を成立させるために次の拘束条件を導入することが必要となる。

$$\frac{1}{2} R_{\mu q}^{(c)}(M) - \frac{1}{6} \epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(A) = R_{q\mu}(D). \quad (4.77)$$

あるいは、あとで与える恒等式 (4.102) を用いることによって次のように書き換えることもできる。

$$R_{q\mu}^{(c)}(M) - \frac{1}{3} \epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(A) = 0. \quad (4.78)$$

この拘束条件が MDAK 変換の元で不変であることはすぐに確かめることができる。また、 S 変換の元で不変であることも少し計算をすればチェックすることができる。

この式は K_m 変換に対応するゲージ場 f_μ^m を代数的に含んでおり、 f をそれ以外のゲージ場の複合場として表すのに用いることができる。

$$f_\nu{}^q = -\frac{1}{4} R_{\nu\lambda}^{(c)(f=0)q\lambda}(M) + \frac{1}{24} e_\nu{}^q R_{kl}^{(c)(f=0)kl}(M) + \frac{1}{12} \epsilon_\nu{}^{q\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(A) \quad (4.79)$$

ただし、 $R^{(c)(f=0)}(M)$ は $R^{(c)}(M)$ の f 項を除いたものである。

拘束条件 (4.78) を用いると、 $\phi_\mu{}^a$ に対する Q 変換の補正 (4.73) は次の形にまで整理することができる。

$$\delta' \phi_\nu = \frac{i}{6} \gamma^5 \gamma^{\kappa\lambda} \gamma_\nu \xi R_{\kappa\lambda}(A) \quad (4.80)$$

これまでに導入した拘束条件によって、 e_μ^m 、 ψ_μ^a 、 c_μ 、 w_μ の上で $\delta_{\text{gc}}^{\text{full}} = 0$ が成り立つことが保障される。また、これら以外のゲージ場 ω 、 ϕ 、 f は複合場として表される。したがって全ての場の上で $\delta_{\text{gc}}^{\text{full}} = 0$ が成り立つことが保障される。

ここまでは独立場についてのみ P 変換の補正を求めたので、複合場についての P 変換がどのように補正されるかを見ておこう。任意の独立場に対して $\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}} V_\mu^X = 0$ が成り立つということは、同じことが複合場についても成り立つはずである。すなわち、次の式が成り立つ。

$$\delta_{\text{gc}}^{\text{mod}} V_\mu^X = \delta_{\text{gc}} V_\mu^X - \epsilon^\lambda \psi_\lambda^a Q'_a V_\mu^X - \epsilon^\lambda e_\lambda^m P'_m V_\mu^X = 0. \quad (4.81)$$

従って、 P' 変換が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} P'_m V_\mu^X &= e_m^\lambda (R_{\lambda\mu}^X - \psi_\lambda^a Q'_a V_\mu^X) \\ &= e_m^\lambda (R_{\lambda\mu}^{(c)X} - \psi_\mu^a Q'_a V_\lambda^X) \end{aligned} \quad (4.82)$$

二行目の表式を得るのに $R_{\mu\nu}^{(c)X}$ の定義式 (4.67) を用いた、

ここまでに得られた拘束条件をまとめておこう。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^m(P) &= 0, \\ \gamma^\mu R_{\mu\nu}(Q) &= 0, \\ R_{\mu\nu}^{(c)}(M) - \frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(A) &= 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

上記の拘束条件をおくことにより、 ω 、 ϕ 、 f が複合場となり、 Q 変換則に次の補正がつく。

$$\begin{aligned}\delta' \omega_{\mu pq} &= -2(\xi \gamma_\mu R_{pq}(Q)), \\ \delta' \phi_\nu &= \frac{i}{6} \gamma^5 \gamma^{\kappa\lambda} \gamma_\nu \xi R_{\kappa\lambda}(A) \\ \delta' f_\nu^k &= (\dots)\end{aligned}\tag{4.84}$$

f の変換則の補正については、以下では用いないので省略した。

4.5 変形された代数

拘束条件の設定によって、 Q 変換と P 変換は補正を受ける。これらの補正された変換がどのような代数を満足するかをチェックするには、独立な場 e_μ^m 、 ψ_μ^a 、 w_μ 、 c_μ の上での代数を見れば十分である。

MDASK 変換については複合場も含め全ての場の変換則が変化しないから、代数もそのままである。

Q 変換と MDASK 変換の交換関係について見てみよう。独立な場に対しては Q 変換も MDASK 変換も補正が無いので、交換関係に対する補正項が現れる可能性があるのは、MDASK 変換をした結果現れる複合場に Q 変換が作用する場合である。しかし、ゲージ変換則を見てみると、独立な場に対する MDASK 変換を行っても複合場は現れない。したがって Q 変換と MDASK 変換の交換関係も補正される前と全く同じ交換関係が成り立つ。

Q 変換同士の反交換関係については、補正された Q 変換同士の反交換関係を補正された P 変換として定義したので、やはり交換関係は元の形がそのまま成り立つ。

P^{mod} 変換とそれ以外の変換の交換関係については、

$$\delta_P^{\text{mod}}(\epsilon^\lambda e_\lambda^m) = \delta_{\text{gc}}^0(\epsilon^\lambda) - \delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}}(\epsilon^\lambda V_\lambda^{X'})\tag{4.85}$$

を用いて計算すれば、次の式を得る。

$$[\delta_P^{\text{mod}}(\epsilon^m), \delta_{\text{gauge}}^{\text{mod}}(\epsilon^{X'})] = \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^{X'} \epsilon^m f_{P_m X'}^Z) + \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^m \delta_Q'(\epsilon^{X'}) V_m^{Z'})\tag{4.86}$$

第 1 項は補正される前のゲージ変換の代数と同じ形をしている。第 2 項は $\epsilon^{X'}$ が Q 変換を与える場合にのみ 0 でない項である。 P と Q の交換関係はあとでしばしば用

いるので、それを X と定義し、具体系を与えておこう。

$$\begin{aligned}
X_{ma} &\equiv [P_m^{\text{mod}}, Q_a^{\text{mod}}] \\
&= \delta_{\text{gauge}}(Q'_a V_m^{Z'}) \\
&= \frac{1}{2}(Q'_a \omega_m^{pq})M_{pq} + (Q'_a \phi_m^\beta)S_\beta + (Q'_a f_m^p)K_p \\
&= -(\gamma_m R^{pq}(Q))_a M_{pq} - \frac{i}{6}R_{\kappa\lambda}(A)(\gamma^5 \gamma_m \gamma^{\kappa\lambda})_a{}^b S_b + (Q'_a f_m^p)K_p. \quad (4.87)
\end{aligned}$$

P^{mod} 同士の交換関係も同様に計算すれば、次の交換関係を得る。

$$[P_m^{\text{mod}}, P_n^{\text{mod}}] = -R_{mn}^{(c)Z} O_Z. \quad (4.88)$$

ここまでに得られた関係式を用いれば、次の関係式を示すのは簡単である。

$$[D_\mu^{\text{mod}}, D_\nu^{\text{mod}}] = 0. \quad (4.89)$$

この関係式は、物質場に対して、 P_m 変換と時空の並進を関係付けるための拘束条件 $D_\mu^{\text{mod}}\Phi = 0$ を課することができることを保障する。また、(4.87) を用いることで D_μ^{mod} が代数が変形された後においても共変微分であること、すなわち

$$[D_\mu^{\text{mod}}, \epsilon^X O_X^{\text{mod}}] = 0. \quad (4.90)$$

が成り立つことを示すことができる。この条件のおかげで、超対称多重項の初項に対して拘束条件 $D_\mu^{\text{mod}}\Phi = 0$ を課せば、それ以外の全ての成分場も自動的に拘束条件を満足することが保障される。

4.6 曲率テンソルの関係式

拘束条件 (4.62) から従ういくつかの公式を与えておこう。次の式は γ 行列の交換関係を用いて直ちに示すことができる。

$$\begin{aligned}
\gamma^{pq} R_{pq}(Q) &= \gamma^{pq} \gamma^m R_{pq}(Q) = \gamma^{pq} \gamma^m \gamma^n \gamma^k R_{pq}(Q) = 0, \\
\gamma^{pq} \gamma^m \gamma^n R_{pq}(Q) &= -8R_{mn}(Q). \quad (4.91)
\end{aligned}$$

また、次の式もしばしば用いられる。

$$\tilde{R}_{mn}{}^a(Q) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{mn}{}^{pq} R_{pq}{}^a(Q) = i(\gamma^5)^a{}_b R_{mn}{}^b(Q) \quad (4.92)$$

これを示すには、 $\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^\sigma R_{\rho\sigma}(Q) = 0$ を変形していき、 $\epsilon^{mnpq} = i\gamma^5 \gamma^{mnpq}$ を用いればよい。また、(4.92) は以下の方法でも示すことができる。拘束条件 (4.62) は $R(Q)$

の低スピン成分を落とすので、残った部分は (4, 1) または (1, 4) 表現に属するから、3 階対称スピノル $\psi^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ および ψ^{abc} を用いて次のように表すことができる。

$$R_{pq}{}^{\bar{c}}(Q) = (\gamma_{pq})_{\bar{a}\bar{b}}\psi^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}, \quad R_{pq}{}^c(Q) = (\gamma_{pq})_{\underline{a}\underline{b}}\psi^{abc} \quad (4.93)$$

これを用いると

$$\epsilon^{mnpq}R_{pq}{}^{\bar{c}}(Q) = (i\gamma^{mnpq}\gamma_{pq})_{\bar{a}\bar{b}}\psi^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = -2i(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}}\psi^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = -2iR^{mn\bar{c}}(Q) \quad (4.94)$$

を示すことができ、カイラリティが逆のもとなわせれば (4.92) を得る。

(4.92) を用いて示される次の式もしばしば用いられる。

$$\gamma_k R_{l\mu}(Q) + \gamma_l R_{\mu k}(Q) + \gamma_\mu R_{kl}(Q) = \epsilon_{kl\mu p}\gamma_q \tilde{R}^{pq}(Q) = -i\epsilon_{kl\mu p}\gamma_q \gamma^5 R^{pq}(Q) = 0 \quad (4.95)$$

次に、 $R(P)$ に対するものと $R(Q)$ に対するものの二つの拘束条件を用いて得ることができる $R(M)$ に対する関係式について述べる。

ビアンキ恒等式 (4.11) から P 成分を取り出せば

$$\begin{aligned} 0 &= [e, R(M)] + [e, R(D)] + [\psi, R(Q)] \\ &= (e_k \wedge R^{km}(M) - e^m \wedge R(D) - 2\psi \wedge \gamma^m R(Q)) P_m = 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

が得られる。一行目の右辺は $e = e^m P_m$ のように、変換記号と縮約を取って代数の添え字をつづしている。ただし、 $R(P)$ に対する拘束条件を用いた。一方 (4.95) を用いれば次の式を示すことができる。

$$e_k \wedge R^{(c)km}(M) = e_k \wedge R^{km}(M) - 2\psi \wedge \gamma^m R(Q) \quad (4.97)$$

したがって、(4.96) は次のように書き換えられる。

$$R_{\mu\nu\lambda}^{(c) m}(M)|_{[\lambda\mu\nu]} = e_\lambda^m R_{\mu\nu}(D)|_{[\lambda\mu\nu]} \quad (4.98)$$

ただし、 $\dots|_{[\lambda\mu\nu]}$ は 3 つの添え字に対する反対称部分を表す。 γ 行列の反対称積を用いて次のようにも書ける。

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} R_{\mu\nu\lambda}^{(c) m}(M) = \gamma^{m\mu\nu} R_{\mu\nu}(D) \quad (4.99)$$

この両辺に γ_m をかければ

$$-2\gamma^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}^{(c)}(M) - \gamma^{\mu\nu\lambda m} R_{\mu\nu\lambda m}^{(c)}(M) = 2\gamma^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(D) \quad (4.100)$$

すなわち、次の二つの式が成り立つ。

$$R_{[\mu\nu pq]}^{(c)}(M)|_{[\mu\nu pq]} = 0, \quad (4.101)$$

$$R_{\mu\nu}^{(c)}(M)|_{[\mu\nu]} = -R_{\mu\nu}(D). \quad (4.102)$$

さらに、公式 (4.98) の添え字を適当に入れ替えてたし引きすることで次の式も示すことができる。

$$R^{(c)m}{}_{npq}(M)|_{[npq]} = R_{np}(D)\delta_q^m|_{[npq]} \quad (4.103)$$

4.7 物質場の導入

これまでに得られたゲージ場についての変換則は、ゲージ場の上で閉じた代数をなす。物質場を導入する際には物質場の上でも同じ代数が成り立つことを要請する。この要請を用いて、物質場の多重項の成分場および変換則を決定することができる。以下ではゲージ変換は全て補正を考慮したものであるとし、‘mod’ は省略することにする。

まず、ベクトル多重項を定義しよう。初項 B はスカラーであるとし、ワイルウェイトとカイラルウェイトを n_D および n_A とする。すなわち、次の式が成り立つとする。

$$DB = n_D B, \quad AB = i n_A B, \quad M_{mn} B = 0. \quad (4.104)$$

大域的超対称性の場合と異なり、ここでの M 変換は局所ローレンツ変換であり、軌道部分には作用しない。 P_m 変換については、次の関係を要請する。

$$\mathcal{D}_\mu B = 0. \quad (4.105)$$

この条件を初項について課すと、多重項中の全ての場が自動的にこの条件を満足することは前節で述べた通りである。共変微分 \mathcal{D}_μ の中から P_m 変換の部分のみを抜き出すと、次のように書き換えることができる。

$$\epsilon^\mu e_\mu^m P_m B = \delta_{\text{gc}}^R(\epsilon^\lambda) B \equiv \epsilon^\mu D_\mu^{(c)} B. \quad (4.106)$$

この式は共変微分の定義式でもある。すなわち、共変微分は次のように定義される。

$$D_\mu^{(c)} B = \partial_\mu B - \delta_{\text{gauge}}(V_\mu^{X'}) B. \quad (4.107)$$

さらに、 B が初項であり、最低のワイルウェイトを持つことから次の条件を満足する。

$$S_a B = K_m B = 0. \quad (4.108)$$

多重項の初項に課されるこの条件を初項条件と呼ぶことにする。 $S_a B = 0$ が成り立てば、交換関係を用いることで $K_m B = 0$ も示されるから、条件として課するのは $S_a B = 0$ だけでよい。

B と同じ超対称多重項に属する場は B に対して Q 変換を繰り返し行うことによって得ることができる。これらをまとめて $V(B)$ と表し大域的超対称理論の場合と同様に (1.80) によって定義する。成分場 D の定義については、次のように二通りに書けることも大域的超対称理論の場合と同様である。

$$D = \frac{1}{8} Q_{\bar{a}} Q_{\underline{b}} Q^{\underline{b}} Q^{\bar{a}} B = \frac{1}{8} Q_{\underline{b}} Q_{\bar{a}} Q^{\bar{a}} Q^{\underline{b}} B \quad (4.109)$$

この関係式は代数を用いて簡単に示すことができる。

多重項の和や積などは、初項に対する和および積を用いて大域的超対称理論の場合と同様に定義される。 $V(X_1)$ と $V(X_2)$ のウェイトをそれぞれ (n_D, n_A) および (n'_D, n'_A) とすれば $V(X_1 X_2)$ のウェイトはそれらの和 $(n_D + n'_D, n_A + n'_A)$ である。二つの表現の積 $V(X_1)V(X_2)$ の成分場を、 $V(X_1)$ と $V(X_2)$ の成分場を用いて表すには、(4.108) による $V(X_1 X_2)$ の成分場の定義式に対して Q 変換のライプニッツ則を適用すればよい。

成分場が (1.80) によって定義されると、代数を用いることで変換則が一意的に定まる。 Q 変換と S 変換を与えておこう。¹まず、 Q 変換は

$$\begin{aligned}
\delta_Q B &= (\xi\eta), \\
\delta_Q \eta_L &= 2\xi_L C + i v_m \gamma^m \xi_R + \gamma^m \xi_R D_m^{(c)} B, \\
\delta_Q C &= (\xi_R \gamma^m D_m^{(c)} \eta_L) + i(\xi_R \lambda_R), \\
\delta_Q v_m &= -i(\xi \gamma^5 D_m^{(c)} \eta) + (\xi \gamma_m \lambda), \\
\delta_Q \lambda_L &= i \xi_L D - \frac{1}{2} \gamma^{pq} \xi_L F_{pq}^{(c)}, \\
\delta_Q D &= i(\xi \gamma^5 \gamma^m D_m^{(c)} \lambda). \tag{4.110}
\end{aligned}$$

S 変換は

$$\begin{aligned}
\delta_S B &= 0, \\
\delta_S \eta &= (2n_D + 3n_A \gamma_5) \zeta B, \\
\delta_S C &= \left(2 - n_D - \frac{3n_A}{2}\right) \zeta_L \eta_L, \\
\delta_S C^* &= \left(2 - n_D + \frac{3n_A}{2}\right) \zeta_R \eta_R, \\
\delta_S v_m &= -i(n_D + 1)(\zeta \gamma^5 \gamma_m \eta) - i \frac{3n_A}{2} (\zeta \gamma_m \eta), \\
\delta_S \lambda &= i \gamma_5 \left[\hat{C}^* - \frac{1}{2} (D_m B + i \gamma_5 v_m) \gamma^m \right] (2n_D + 3n_A \gamma_5) \zeta, \\
\delta_S D &= \zeta \left(n_D + \frac{3}{2} n_A \gamma_5 \right) \left(2i \gamma_5 \lambda - \gamma^m D_m^{(c)} \eta \right). \tag{4.111}
\end{aligned}$$

超共変化された微分および $F_{mn}^{(c)}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(c)} B &= \partial_\mu B - n_D w_\mu B - (\psi_\mu \eta), \\
D_\mu^{(c)} \eta &= D_\mu^{(MDA)} \eta - 2\psi_\mu C_R - 2i \gamma^5 \psi_\mu C_I - i \gamma^5 \lambda \psi_\mu - (D^{(c)} B) \psi_\mu - 2n_D \phi_\mu B, \\
F_{mn}^{(c)} &= D_m^{(c)} v_n - D_n^{(c)} v_m - \epsilon_{mnpq} D^{(c)p} D^{(c)q} B \tag{4.112}
\end{aligned}$$

¹ $n_A = 0$ の場合の式は NPB212(1983)413 の (2.4) に与えられている。

上で与えた $F_{mn}^{(c)}$ は次のように定義されるものである。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}}F_{mn}^{(+)} &= \frac{i}{4}Q_{\bar{a}}Q_{\underline{c}}Q_{\underline{c}}Q_{\bar{b}}B|_{\{\bar{a}\bar{b}\}}, \\ \frac{1}{2}(\gamma^{mn})_{\underline{a}\underline{b}}F_{mn}^{(-)} &= -\frac{i}{4}Q_{\underline{a}}Q_{\bar{c}}Q_{\bar{c}}Q_{\underline{b}}B|_{\{\underline{a}\underline{b}\}},\end{aligned}\quad (4.113)$$

この $F_{mn}^{(c)}$ が (4.112) のように与えられることを示しておこう。まず、交換関係を繰り返し用いることで次の式が得られる。

$$\begin{aligned}Q_{\bar{a}}Q_{\underline{c}}Q_{\underline{c}}Q_{\bar{b}}B &= 4P_{\bar{a}\underline{c}}P_{\bar{c}\underline{b}}B - 2P_{\bar{a}\underline{c}}[Q_{\underline{c}}, Q_{\bar{b}}]B \\ &\quad - 2(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{c}}\{X_{m\underline{c}}, Q_{\bar{b}}\}B + Q_{\underline{c}}Q_{\underline{c}}Q_{\bar{a}}Q_{\bar{b}}B\end{aligned}\quad (4.114)$$

この式から \bar{a} と \bar{b} の対称部分を抜き出そう。第 4 項はこの対称化によって 0 になる。第 1 項については

$$\begin{aligned}4P_{\{\bar{a}\underline{c}}P_{\bar{c}\underline{b}}\}B &= -2(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}}[P_m, P_n]B \\ &= 2R_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}(Q)Q_{\bar{c}}B + 2R_{\bar{a}\bar{b}}(A)AB + 2R_{\bar{a}\bar{b}}(D)DB \\ &= 2R_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}(Q)Q_{\bar{c}}B + 2R_{\bar{a}\bar{b}}(A)\left(A + \frac{2i}{3}D\right)B\end{aligned}\quad (4.115)$$

ただし、

$$R_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}(Q) = (\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}}R_{mn}^{\bar{c}}(Q)\quad (4.116)$$

のような記号を用いた。また、拘束条件から従う関係式

$$R_{\mu\nu}^{(s)}(M) = \frac{2}{3}\tilde{R}_{\mu\nu}(A) = -R_{\mu\nu}(D)\quad (4.117)$$

を用いた。第 2 項には (4.87) を代入すると、

$$\begin{aligned}-2(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{c}}\{X_{m\underline{c}}, Q_{\bar{b}}\}B &= 8(R^{pq}(Q))_{\bar{a}}[M_{pq}, Q_{\bar{b}}]B - \frac{4i}{3}R_{\kappa\lambda}(A)(\gamma^{\kappa\lambda})_{\bar{a}}^{\bar{c}}\{S_{\bar{c}}, Q_{\bar{b}}\}B \\ &= -4R_{\bar{b}}^{\bar{c}}(Q)Q_{\bar{c}}B - 4R_{\bar{a}\bar{b}}(A)\left(A + \frac{2i}{3}D\right)B\end{aligned}\quad (4.118)$$

これは第 1 項の -2 倍である。これらをあわせると (4.112) が得られる。

初項を ϕ とするカイラル多重項 $\Sigma[\phi]$ はベクトル多重項の初項条件 (4.108) よりもさらに強い次の条件を初項に課すことによって定義される。

$$S_{\bar{a}}\phi = S_{\underline{a}}\phi = Q_{\underline{a}}\phi = 0\quad (4.119)$$

カイラル多重項の初項に対する条件 (4.119) をカイラル条件と呼ぶことにしよう。

ϕ がカイラル条件 (4.119) を満足するとき、その複素共役 ϕ^* は次の条件を満足する。

$$S_{\bar{a}}\phi^* = S_{\underline{a}}\phi^* = Q_{\underline{a}}\phi^* = 0\quad (4.120)$$

この条件を満足する初項より構成される多重項 $V(\phi^*)$ は反カイラル多重項と呼ばれ、 $\overline{\Sigma}(\phi^*)$ のように表すことにする。

カイラル多重項 $\Sigma(\phi)$ に含まれる成分場は大域的超対称理論の場合と同様に (1.84) によって定義する。 ϕ のワイルウェイトとカイラルウェイトを n_D および n_A とすれば、カイラル多重項の成分場はそれぞれ次のウェイトを持つ。

	ϕ	χ_L	F	
Weyl weight	n_D	$n_D + 1/2$	$n_D + 1$	(4.121)
chiral weight	n_A	$n_A - 1$	$n_A - 2$	

カイラル多重項のウェイトと言った場合にはその成分場 ϕ のウェイトをさす。カイラル条件 (4.119) より $\{S_a, Q_b\}\phi = 0$ であり、交換関係 (4.44) を用いると、次の関係式を示すことができる。

$$n_D = \frac{3}{2}n_A. \quad (4.122)$$

つまり、カイラル多重項のワイルウェイトとカイラルウェイトは独立に取ることはできない。

カイラル多重項は、複素ベクトル多重項において、成分場を次のように置いたものとして与えられる。

$$B = \phi, \quad \eta_L = \chi_L, \quad C = F, \quad v_m = -iD_m\phi, \quad \eta_R = C^* = \lambda_L = \lambda_R = D = 0. \quad (4.123)$$

これを (4.110) および (4.111) に代入することにより、変換則が次のように得られる。²まず Q 変換は

$$\begin{aligned} \delta_Q\phi &= \xi_L\chi_L, \\ \delta_Q\chi_L &= 2\xi_L F + 2\gamma^{\widehat{m}}\xi_R D_{\widehat{m}}^{(c)}\phi, \\ \delta_Q F &= \xi_R \gamma^{\widehat{m}} D_{\widehat{m}}^{(c)}\chi_L. \end{aligned} \quad (4.124)$$

S 変換は

$$\begin{aligned} \delta_S\phi &= 0, \\ \delta_S\chi_L &= 6n_A\zeta_L\phi, \\ \delta_SF &= (2 - 3n_A)(\zeta_L\chi_L). \end{aligned} \quad (4.125)$$

S 変換を二回繰り返してみると、カイラル多重項には K 変換は作用しないことがわかる。

$$\delta_K\phi = \delta_K\chi_L = \delta_K F = 0 \quad (4.126)$$

²NPB212(1983)413 の (2.2) に対応

共変化された微分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 D_\mu^{(c)}\phi &= \partial_\mu\phi - n_D w_\mu\phi - i n_A c_\mu\phi - \psi_{L\mu}\chi_L, \\
 D_\mu^{(c)}\chi_L &= \partial_\mu\chi_L + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}\gamma_{pq}\chi_L - 2\psi_{L\mu}F - 2\gamma^\lambda\psi_{R\mu}D_\lambda^{(c)}\phi \\
 &\quad - \left(\frac{3}{2}n_A + \frac{1}{2}\right)w_\mu\chi_L - i(n_A - 1)c_\mu\chi_L - 6n_A\phi_{L\mu}\phi \quad (4.127)
 \end{aligned}$$

4.8 超対称不変な作用積分

大域的な超対称性をもつ理論においては、カイラル多重項の F 成分は、超対称変換が全微分項のみを含むため、その積分を超対称不変なラグランジアンとして用いることができた。超共形重力理論においても同様の方法でラグランジアンを作ることができる。ただし、単に

$$\mathcal{L}_0 = eF \quad (4.128)$$

では完全な全微分項にはならないので、ネーター処方を用いて補正項を加えていくことにする。

(4.128) が D と A で不変であるためには、 F はワイルウェイト $n_D = 4$ 、カイラルウェイト $n_A = 0$ を持つ必要がある。このときカイラル多重項のウェイト（すなわち ϕ 成分のウェイト）は

$$n_D = 3, \quad n_A = 2 \quad (4.129)$$

でなければならない。(4.128) が任意の変換のもとで不変であることを示すには、 Q 変換と S 変換で不変であることを示せば十分である。実際に変換を行い、ネーター処方によって補正項を付け加えていくという操作を行うと、次の超対称不変な作用を得ることができる。³

$$\mathcal{L} = [\Phi]_F = eF + e(\psi_{\mu R}\gamma^\mu\chi_L) + 2e(\psi_{\mu R}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\nu R})\phi \quad (4.130)$$

これは、ウェイト条件 (4.129) を満足する任意のカイラル多重項から不変作用 (F 項ラグランジアン) を与える公式である。

カイラル多重項の運動項を与えるためには、もう一つ、 D 項ラグランジアンを定義する必要がある。そのために、超場形式におけるカイラル射影演算子に相当するものを構成しよう。カイラル射影演算子は、任意の超場が与えられたときに、そこからカイラル多重項を抜き出すような演算子であった。それは反カイラル共変微分 $D_{\underline{a}}$ を二回超場に作用させることによって得られた。それに対応するものとして、複素ベクト

³NPB212 (1983) 413 の (2.3)

ル多重項の初項 B に対して、 $Q_{\underline{a}}$ 変換を二回作用させたものを考えよう。 $Q_{\underline{a}}Q^{\underline{a}}B$ がカイラル条件を満足するかどうか確かめてみると、次の式が成り立つことがわかる。

$$Q_{\underline{a}}Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}X = 0, \quad (4.131)$$

$$S_{\bar{a}}Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}X = 0, \quad (4.132)$$

$$S_{\bar{a}}Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}X = 8 \left(1 - \frac{1}{2}n_D + \frac{3}{4}n_A \right) Q_{\underline{a}}X \quad (4.133)$$

したがって、もし X のウェイトが

$$1 - \frac{1}{2}n_D + \frac{3}{4}n_A = 0 \quad (4.134)$$

を満足すれば、 $Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}X$ はカイラル条件 (4.119) を満足する。したがってこれを初項としてカイラル多重項を構成することができる。これは運動多重項 (kinetic multiplet) と呼び、 $T(V)$ と表す。任意のウェイトを持つスカラー超場を V とし、 $(1/4)Q_{\underline{a}}Q^{\underline{a}}B$ を初項とする運動多重項の成分場は次のように与えられる。(ただし、これがカイラル多重項になるためには、ウェイトが条件 (4.134) を満足しているはずがある。)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4}Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}B = C^*, \\ \chi_{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{4}Q_{\bar{a}}Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}B = (\gamma^m D_m^{(c)} \eta_R)_{\bar{\alpha}} - i\lambda_{\bar{\alpha}}, \\ F &= \frac{1}{16}Q_{\bar{a}}Q^{\bar{a}}Q_{\underline{b}}Q^{\underline{b}}B = \frac{1}{2}D_m^{(c)}(D^{(c)m}B - iv^m) + \frac{1}{2}D \end{aligned} \quad (4.135)$$

カイラル多重項 $\Phi = \Sigma(\phi)$ のウェイトが $(n_D, n_A) = (1, 2/3)$ のとき、初項の複素共役 ϕ^* はウェイト $(n_D, n_A) = (1, -2/3)$ を持ち、条件 (4.134) が満足されるから、運動多重項

$$T(\Phi^*) = \Sigma(F^*) = \Sigma\left(\frac{1}{4}Q_{\underline{a}}Q^{\underline{a}}\phi^*\right) \quad (4.136)$$

を定義することができる。運動多重項は定義できるのは、反カイラル多重項についてだけではない。一般のベクトル多重項に対しても、ウェイトが (4.134) を満足していれば運動多重項を定義することができる。また、一般のベクトル多重項 $V = V(B)$ とカイラル多重項 $\Phi = \Sigma(\phi)$ の積 ΦV の運動多重項を定義すると、

$$T(\Phi V) = \Sigma\left(\frac{1}{4}Q_{\underline{a}}Q^{\underline{a}}(\phi B)\right) = \Sigma\left(\frac{1}{4}\phi Q_{\underline{a}}Q^{\underline{a}}B\right) = \Phi T(V) \quad (4.137)$$

となる。すなわち、カイラル多重項は $T(*)$ の外に出すことができる。

反カイラル多重項に対する運動多重項 $T(\Phi^*)$ の成分場をもとの多重項 Φ の成分場で表しておこう。 $\Phi_K = T(\Phi^*)$ とし、その成分場を (ϕ_K, χ_K, F_K) とおく。運動多重項の定義より次の式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_K &= F^*, \\ \chi_K^{\bar{b}} &= -(\gamma^{\mu})^{\bar{a}}_{\underline{b}} D_{\mu}^{(c)} \chi^{\underline{b}}, \\ F_K &= D_m^{(c)} D^{(c)m} \phi^* \end{aligned} \quad (4.138)$$

上で与えられた運動カイラル多重項を用いれば、ウェイト $n_D = 2, n_A = 0$ を持つ一般の多重項 V を用いて D 項ラグランジアンを次のように定義することができる。

$$\begin{aligned}
[V]_D &= 2[T(V)]_F \\
&= \int d^4x e \left[D - \frac{1}{3} R_{mn}^{(\omega)mn} B + \frac{2}{3} (\psi_m \gamma^{mnp} \psi_n^{(MDA)}) B \right. \\
&\quad + i(\psi_m \gamma_5 \gamma^m \lambda) - i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) v_k \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (\psi_{mn}^{(MDA)} \gamma^{mn} \eta) - (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) (\psi_k \gamma_5 \eta) \right] \quad (4.139)
\end{aligned}$$

この式は (4.130) に対してベクトル多重項から作った運動多重項の成分場 (4.135) を代入し、部分積分を行って変形することにより得られる。これは、超対称性が大域的な場合の式 (1.60) に対応するものである。 $2[T(V)]_F$ という表式は、実であるかどうかは明らかではないが、上記のように変形することで (表面項を除き) 実であることが確認できる。

4.9 ゲージ多重項

大域的超対称理論の場合に、ゲージ場に結合したカイラル超場には二つの定義の仕方があった。一つは超空間上のベクトルポテンシャルに結合したカノニカルなカイラル超場 $\tilde{\Phi}$ を用いる方法で、もう一つはプレポテンシャルに結合した正則なカイラル超場 Φ を用いる方法である。テンソル計算法では、超空間上のベクトルポテンシャルに相当するものをどのように導入すべきが明らかではないので、ここでは正則なカイラル超場に相当するカイラル多重項とプレポテンシャルを用いる方法でゲージ多重項を導入しよう。ここでは話を簡単にするために線形なゲージ変換のみを扱うことにする。

カイラル多重項 Φ に対する次のゲージ変換を考えよう。

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^\Lambda \Phi. \quad (4.140)$$

ただし、変換パラメータ Λ もカイラル多重項であり、全ての成分場は複素化されたゲージ群の代数に値をとるものである。 Λ のウェイトは 0 である。

Φ^* から構成される運動多重項を Φ_K としよう。運動項 $[\Phi_K \Phi]$ が (4.140) の元で不変であるためには、 Φ_K は次のように変換される必要がある。

$$\Phi_K \rightarrow \Phi'_K = \Phi_K e^{-\Lambda}. \quad (4.141)$$

しかしながら、§4.8 で定義された運動多重項 $T(\Phi^*)$ はこの条件を満足しない。(4.140) のもとで共変に振舞う運動多重項を定義するには、プレポテンシャル V をウェイト

が 0 の実ベクトル多重項として導入し、これが (4.140) のもとで次のように変換されるとする。

$$e^{-2V} \rightarrow e^{-2V'} = e^{-\Lambda^\dagger} e^{-2V} e^{-\Lambda}. \quad (4.142)$$

これを用いると、(4.141) のように変換されるゲージ共変な運動多重項を次のように定義することができる。

$$\Phi_K = T(e^{-2V} \Phi^*) \quad (4.143)$$

このように、ゲージ場の役割をするウェイトが 0 のベクトル多重項 V はゲージ多重項と呼ばれる。

ゲージ変換 (4.142) を用いると、次の Wess-Zumino ゲージを取ることができることは大域的超対称理論の場合と同様である。

$$B = Q_a B = Q_{\bar{a}} Q^{\bar{a}} B = Q_{\underline{a}} Q^{\underline{a}} B = 0. \quad (4.144)$$

V がウェイト 0 の実ベクトル多重項であるとき、その成分場 v_m はワイルウェイト 1 を持つ。したがって $v_\mu = e_\mu{}^m v_m$ のワイルウェイトは 0 であり、これをゲージ場と解釈することができそうである。そこで、変換パラメータのカイラル多重項を $\Lambda = \Sigma(\phi_\Lambda) = (\phi_\Lambda, \chi_\Lambda, F_\Lambda)$ として (4.142) の変換則がどのようにベクトル場 v_m を変換するかを見てみよう。ゲージ変換 (4.142) のもとでの、 V の変換則は大域的超対称理論の場合と全く同じ式 (1.140) で与えられる。Wess-Zumino ゲージを保つような変換のみに注目すれば $\Lambda = \Sigma(\phi_\Lambda) = (\phi_\Lambda = i\epsilon, 0, 0)$ だけが許されて、成分場のゲージ変換が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gauge}} v_m &= \partial_m \epsilon - i[v_m, \epsilon], \\ \delta_{\text{gauge}} \lambda &= -i[\lambda, \epsilon], \\ \delta_{\text{gauge}} D &= -i[D, \epsilon]. \end{aligned} \quad (4.145)$$

従って、ベクトル場 $v_\mu = e_\mu{}^m v_m$ は次のように通常のゲージ変換性を持つことがわかる。

$$\delta_{\text{gauge}} v_\mu = \partial_\mu \epsilon - i[v_\mu, \epsilon] \quad (4.146)$$

Wess-Zumino ゲージにおける Q 変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_Q B &= 0, \\ \delta_Q \eta &= i\gamma^5 \lambda \xi, \\ \delta_Q C &= -i(\xi_R \gamma^\mu \lambda \psi_{R\mu}) + i\xi_R \lambda_R, \\ \delta_Q v_\mu &= (\xi \gamma_\mu \lambda), \\ \delta_Q \lambda &= i\gamma^5 \xi D - \frac{1}{2} \gamma^{pq} \xi F_{pq}^{(c)}, \\ \delta_Q D &= i(\xi \gamma^5 \gamma^m D_m^{(c)} \lambda). \end{aligned} \quad (4.147)$$

Wess-Zumino ゲージにおける S 変換は全て 0 である。

$$\begin{aligned}
 \delta_S B &= 0, \\
 \delta_S \eta &= 0, \\
 \delta_S C &= 0, \\
 \delta_S v_\mu &= 0, \\
 \delta_S \lambda &= 0, \\
 \delta_S D &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.148}$$

λ の変換則にあらわれる $F_{mn}^{(c)}$ は $n_D = 0$ のときに具体的に成分場を用いて次のように表される。

$$F_{mn}^{(c)} = e_m^\mu e_n^\nu (\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) - (\psi_m \gamma_n \lambda) + (\psi_n \gamma_m \lambda) \tag{4.149}$$

あとで用いるので、この反対称テンソル場の超対称変換を与えておこう。

$$\delta_Q F_{mn} = (\xi \gamma_n D_m^{(c)} \lambda) - [mn] \tag{4.150}$$

Q 変換を行うと、Wess-Zumino ゲージは破れるので、ゲージを回復するために次の変換パラメータによるゲージ変換を行う必要がある。

$$\begin{aligned}
 \phi_\Lambda &= 0, \\
 \chi_{\Lambda L} &= -2i\lambda\xi_R, \\
 F_\Lambda &= 2i(\xi_R \gamma^m \lambda \psi_{Rm}) - 2i(\xi_R \lambda_R)
 \end{aligned} \tag{4.151}$$

このゲージの取り直しは成分場 (v_μ, λ, D) に対して次のように作用する。

$$\begin{aligned}
 \delta' v_\mu &= 0, \\
 \delta' \lambda_L &= i\gamma^{\mu\nu} \xi_L [v_\mu, v_\nu], \\
 \delta' D &= \xi \gamma_5 \gamma^\mu [v_\mu, \lambda] - \frac{1}{2} (\psi_\lambda \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \gamma^\lambda \xi) [v_\rho, v_\sigma].
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

これらは変換則中の微分項をゲージ対称性のもとで共変な微分に置き換える役割を果たす。^delta' D の第 2 項は大域的超対称理論の場合にはなかった項である。この項は D の変換則中の超共変微分 $D_\mu^{(c)} \lambda$ に含まれる $F_{\mu\nu}^{(c)}$ をゲージ共変にする役割を果たす。

$\lambda_L = (i/4) Q_{\bar{b}} Q^b Q_L B$ の変換則 (4.147) と (4.148) を見てみると、 $\lambda_{\bar{a}}$ はカイラル条件 (4.119) を満足していることがわかる。すなわち

$$Q_{\underline{a}} \lambda_{\bar{b}} = S_{\bar{a}} \lambda_{\bar{b}} = S_{\underline{a}} \lambda_{\bar{b}} = 0 \tag{4.153}$$

が成り立つ。(これは Wess-Zumino ゲージ以外でも一般的に成り立つ。) 実際 $\lambda_{\bar{a}}$ はワイルウェイト 3/2、カイラルウェイト 1 を持ち、ウェイトに対する条件 (4.122) も

満足している。そこで、 $\lambda_{\bar{b}}$ で始まるカイラル多重項を定義することができる。ただし非アーベル群の場合には、ゲージ共変性を尊重するために初項 λ の定義を

$$\lambda_L = -\frac{i}{8} Q_{\underline{b}} Q^{\underline{b}} (e^{2B} Q_L e^{-2B}) \quad (4.154)$$

とする必要がある。これは Wess-Zumino ゲージは上で定義した λ に一致するが、そこから定義したカイラル多重項の成分場は異なることに注意。 $W_{\bar{\beta}} = \Sigma(\lambda_{\bar{\beta}})$ を定義しよう。 $\lambda_{\bar{\beta}}$ 以外の成分場は (1.84) に従って定義され、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi[W_{\bar{b}}] &= \lambda_{\bar{b}} \\ \chi_{\bar{a}}[W_{\bar{b}}] &= Q_{\bar{a}} \lambda_{\bar{b}} = -i C_{\bar{b}\bar{a}} D + \frac{1}{2} (\gamma^{pq})_{\bar{b}\bar{a}} F_{pq}^{(c)} - \frac{i}{2} (\gamma^{\mu\nu})_{\bar{b}\bar{a}} [v_{\mu}, v_{\nu}], \\ F[W_L] &= \frac{1}{4} Q_{\bar{a}} Q^{\bar{a}} \lambda_L = \gamma^m D_m^{(c)} \lambda_R - i \gamma^{\mu} [v_{\mu}, \lambda_R] - \frac{i}{2} \gamma^{\mu} \gamma^{\rho\sigma} \psi_{R\mu} [v_{\rho}, v_{\sigma}] \end{aligned} \quad (4.155)$$

このように、 $W_{\bar{a}}$ の成分場はゲージ共変であり特に場の強さ $F_{\mu\nu}^{(c)}$ を含んでいる。

電荷をもつカイラル多重項についてもゲージの取り直しの影響を与えておこう。ゲージの取り直しの操作まで含めた超対称変換を δ_{WZ} とすると、ゲージ場に結合したカイラル多重項に対して次のように作用する。

$$\begin{aligned} \delta_{\text{WZ}} \phi &= \xi_L \chi_L, \\ \delta_{\text{WZ}} \chi_L &= 2\xi_L F + 2\gamma^{\mu} \xi_R \mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \phi, \\ \delta_{\text{WZ}} F &= \xi_R \gamma^{\mu} \mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \chi_L - 2i \xi_R \lambda_R \phi \end{aligned} \quad (4.156)$$

ただし、 $\mathcal{D}_{\mu}^{(c)}$ はゲージ対称性についても共変化した微分で、次のように定義される。

$$\mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \phi = D_{\mu}^{(c)} \phi - i [v_{\mu}, \phi], \quad (4.157)$$

$$\mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \chi_L = D_{\mu}^{(c)} \chi_L - i [v_{\mu}, \chi_L] + 2i \lambda \psi_{R\mu} \phi \quad (4.158)$$

$\mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \chi^{\bar{b}}$ の定義の最後の項は、 $\mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \chi^{\bar{b}}$ に含まれる $D_{\mu}^{(c)} \phi$ を $\mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \phi$ に置き換える役割を果たす。 S 変換については Wess-Zumino ゲージを破らないから、 Q 変換の時のようなゲージの取り直しをする必要はない。

ワイルウェイト $n_D = 1$ を持つカイラル多重項から作られるゲージ共変な運動多重項 $T(\Phi^{\dagger} e^{-2V})$ の Wess-Zumino ゲージにおいての成分は次のように与えられる。

$$\phi_G = F^{\dagger}, \quad (4.159)$$

$$\chi_{GL} = (\gamma^{\mu}) \mathcal{D}_{\mu}^{(c)} \chi_R, \quad (4.160)$$

$$F_G = \mathcal{D}_{\bar{m}}^{(c)} \mathcal{D}^{(c)\bar{m}} \phi^{\dagger} + i(\chi_R \lambda_R) - \phi^{\dagger} D \quad (4.161)$$

4.10 超共形重力理論

ウェイトが $(n_D, n_A) = (2, 0)$ の実ベクトル多重項か $(n_D, n_A) = (3, 2)$ のカイラル多重項があれば、局所的超共形変換のもとで不変な作用を構成することができる。

まず、物質場を導入せずに、重力多重項のみからなる超共形重力理論を構成しよう。カイラル多重項を構成するためには、カイラル条件を満足するような場を見つける必要がある。重力多重項に含まれる場の中では、 $R_{\hat{m}\hat{n}}^{\bar{a}}(Q)$ がこの条件を満足する。この場はローレンツ群の表現 $(3/2, 0)$ に属し、ワイルウェイト、カイラルウェイトはそれぞれ $n_D = 3/2$ 、 $n_A = 1$ である。これらはカイラル多重項の初項としての条件を満足している。

S 変換が 0 になることは、曲率テンソルのゲージ変換則と拘束条件 $R(P) = 0$ よりすぐにわかる。また、 $Q_{\underline{a}}$ 変換が 0 であることも示すことができる。

$$\delta_Q^{\text{mod}}(\xi^{\underline{b}})R_{mn}^{\bar{a}} = 0 \quad (4.162)$$

以上より、重力多重項のみを含むカイラル多重項

$$\Sigma(R_{mn}^{\bar{a}}(Q)) \quad (4.163)$$

が定義できる。

F 項ラグランジアンを構成するにはウェイトがちょうど $\Sigma(R_{mn}^{\bar{a}}(Q))$ の倍であればよい。従って、次のようにラグランジアンを構成することができる。

$$\mathcal{L} = \text{Re}[\Sigma(R_{mn}^{\bar{a}}(Q)R^{mn\bar{a}}(Q))]_F \quad (4.164)$$

ここでは、このラグランジアンのボゾン部分を決定しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{Re} \left[\frac{e}{4} Q_{\bar{a}} Q^{\bar{a}} (R_{mn\bar{b}}(Q) R^{mn\bar{b}}(Q)) \right] + \dots \\ &= -\frac{e}{2} \text{Re} \left[(Q_{\bar{a}} R_{mn\bar{b}}(Q)) (Q^{\bar{a}} R^{mn\bar{b}}(Q)) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.165)$$

$R_{mn}^{\bar{a}}(Q)$ の $Q_{\bar{a}}$ 変換は次のように与えられる。

$$Q_{\bar{a}}^{\text{mod}} R_{mn\bar{b}}(Q) = -\frac{1}{4} (\gamma_{pq})_{\bar{a}\bar{b}} R_{mn}^{(c) pq}(M) + \frac{3}{2} C_{\bar{a}\bar{b}} \left[R_{mn}^{(c)}(M) + \frac{i}{2} \epsilon_{mn}{}^{pq} R_{pq}^{(c)}(M) \right] \quad (4.166)$$

これを用いると、上記作用のボゾン部分が次のように決定される。

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{8} R_{mnpq}^{(\omega)} R^{(\omega) mnpq} - \frac{9e}{2} R_{mn}^{(\omega)} R^{(\omega) mn} + \dots \quad (4.167)$$

このように、純粹に重力多重項のみを含む超共形重力理論は高階微分を含む理論である。

重力に結合した超コンフォーマル対称性を持つカイラル多重項の理論のラグランジアンを構成しよう。ここでは最も簡単な、カイラル多重項が一つだけの場合を考える。もし Φ のワイルウェイトが 0 であると、ラグランジアンを構成するためのウェイトについての条件を満足することができない。従って Φ のウェイトは 0 でない値にす

る必要がある。0 でなければ何乗かすることによってどんなウェイトの場も構成することができるので、どのようなウェイトをとっても良いが、ここではウェイト

$$n_D = 1, \quad n_A = \frac{2}{3} \quad (4.168)$$

であるようなカイラル多重項 Φ を含む理論を考えよう。 $V = \Phi^* \Phi$ はワイルウェイト 2 を持つ実スカラー超場であるから、D 項作用 $(1/2)[V]_D$ を与えることができる。 V の成分場が

$$\begin{aligned} V &= \Phi^* \Phi, \\ B &= \phi^* \phi, \\ \eta &= \widehat{\phi}^* \chi, \\ C &= \phi^* F, \\ C^* &= \phi F^*, \\ v_m &= iD_m^{(c)} \phi^* \phi - i\phi^* D_m^{(c)} \phi - \frac{i}{4} (\chi \gamma_5 \gamma_m \chi), \\ \lambda &= i\gamma_5 \widehat{F}^* \chi + i\gamma_5 (D_m^{(c)} \widehat{\phi}) \gamma^m \chi, \\ D &= 2F^* F - 2D_m^{(c)} \phi^* D^{(c)m} \phi - \frac{1}{2} (\chi \gamma^m D_m^{(c)} \chi). \end{aligned} \quad (4.169)$$

と与えられることを用いると、D 項作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [\Phi^* \Phi]_D^{\text{Conformal}} \\ &= \int d^4 x e \left[F^* F - D_m^{(c)} \phi^* D^{(c)m} \phi - \frac{1}{6} R_{mn}^{(\omega)mn} \phi^* \phi + \text{fermion terms} \right] \end{aligned} \quad (4.170)$$

上記のラグランジアンは、よく知られたスカラー曲率とスカラー場の共形結合項 $-(1/6)R\phi\phi^*$ を含んでいる。

超共変性を破らないもう一つのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = [\Phi^3]_F = e \left(3\phi^2 F - \frac{3}{2} \phi (\chi_L \chi_L) \right) + 3e (\psi_{R\mu} \gamma^\mu \chi_L) \phi^2 + 2e (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) \phi^3 \quad (4.171)$$

ゲージ場の運動項を与える F 項ラグランジアンが成分場を用いて次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} [W_L W_L]_F^{\text{Conformal}} \\ &= -\frac{e}{4} F_{\widehat{p}\widehat{q}}^{(c)} F^{(c)\widehat{p}\widehat{q}} - \frac{ie}{8} \epsilon^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}} F_{\widehat{p}\widehat{q}}^{(c)} F_{\widehat{r}\widehat{s}}^{(c)} - e \lambda_L \gamma^{\widehat{m}} D_{\widehat{m}}^{(c)} \lambda_R + \frac{e}{2} D^2 \\ &- 2ie D (\psi_{R\mu} \gamma^\mu \lambda_L) - \frac{e}{2} (\psi_{R\mu} \gamma^\mu \gamma^{\widehat{p}\widehat{q}} \lambda_L) F_{\widehat{p}\widehat{q}}^{(c)} - 2e (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) (\lambda_L \lambda_L) \end{aligned} \quad (4.172)$$

正確にはさらにこの実部をとる必要がある。

4.11 大域的共形対称性

平坦な時空上での大域的な超コンフォーマル変換がどのように与えられるかを見ておこう。大域的な超コンフォーマル変換は、重力多重項に属する背景場を全て不変に保つような変換として定義される。ここでは背景時空を次のように置く。

$$\eta_\mu{}^m = \delta_\mu^m, \quad \psi_\mu{}^a = \omega_\mu{}^{mn} = w_\mu = c_\mu = \phi_\mu{}^a = f_\mu{}^m = 0. \quad (4.173)$$

このとき、曲率テンソルは全て 0 であり、確かに拘束条件を満足している。平坦な時空ではなく、より一般の曲がった時空に対しても、それらが拘束条件を満足すれば以下で述べる方法で大域の変換を定義することができるが、その場合には超共形代数の全ての生成子が大域的対称性として実現されるとは限らない。

これらのゲージ場を変化させないような変換として大域的な超共系変換を定義することができる。ここでは Q 変換および S 変換に注目しよう。これら以外の変換については、これらの変換の（反）交換関係を用いることで生成することができる。

フェルミオンが全て 0 であるから、 QS 変換によるボゾンの場の変換が 0 であることは明らかである。また、 ϕ_μ は拘束条件によって複合場として書かれているから、グラビティーノが不変であることを要求すれば十分である。背景時空は平坦であり、スピン接続が 0 であるから、共変微分は単なる微分になる。したがってグラビティーノの変換が 0 になるべしという条件は

$$\delta_{Q,S}\psi_m = \partial_m \xi - \gamma_m \zeta = 0. \quad (4.174)$$

と与えられる。この式を用いて ζ が次の関係式を満足することが示される。（ $\gamma_{[m}\partial_{n]}\zeta = -\partial_{[m}\partial_{n]}\xi = 0$ とすればよい。）

$$\gamma_{[m}\partial_{n]}\zeta = 0. \quad (4.175)$$

ここで、任意のスピノルベクトル S_m に対して $\gamma_{[m}S_{n]} = 0$ という条件は $S_m = 0$ であることを表すということを用いれば、(4.175) は $\partial_m \zeta = 0$ を意味し、 ζ は定数スピノルである。これを ζ_0 と置こう。あとは (4.174) を積分すれば ξ を決めることができる。一般解は次のように与えられる。

$$\xi = \xi_0 + x^m \gamma_m \zeta_0, \quad \zeta = \zeta_0. \quad (4.176)$$

定数スピノル ξ_0 および ζ_0 は大域的超コンフォーマル変換のパラメータと解釈されるものであり、

$$\delta^{\text{global}} = \xi_0^a Q_a^{\text{global}} + \zeta_0^a S_a^{\text{global}} = \xi^a Q_a + \zeta^a S_a \quad (4.177)$$

によって大域の変換 Q^{global} と S^{global} を定義することができる。この式に (4.176) を代入すれば

$$Q_a^{\text{global}} = Q_a, \quad S_a^{\text{global}} = S_a - x^m (\gamma_m)_a{}^b Q_b \quad (4.178)$$

が得られる。 S^{global} の式には座標 x^m が含まれているが、これを場の微分に作用させる場合には x^m は微分の内側に入ることに注意すること。例えば、フェルミオンに対して $\delta_S \delta_Q \psi$ のような変換を行うことを考えると、はじめの Q 変換によって $\partial\phi$ が得られるが、二回目の変換は $\partial(\delta_S \phi)$ のように微分の内側の ϕ を $\delta_S \phi$ で置き換える。従って座標 x^m にも微分が作用する。

これらの変換の交換関係から、大域的な $PMDAK$ 変換を次のように読み取ることができる。

$$\begin{aligned} P_m^{\text{global}} &= P_m, \\ M_{pq}^{\text{global}} &= M_{pq} - (x_p P_q - x_q P_p), \\ D^{\text{global}} &= D + x^m P_m, \\ A^{\text{global}} &= A, \\ K_m^{\text{global}} &= K_m - 2x^k M_{km} - 2x_m D - (2x^n x^m - x_k x^k \eta^{mn}) P_n. \end{aligned} \quad (4.179)$$

4.12 ポアンカレ超重力理論

これまで、局所的超共形対称性を持つ共形超重力理論について考えてきた。しかし、多くの場合、我々がほしいのは超ポアンカレ対称性を持つ超重力理論である。超共形対称性をもつ理論から、超ポアンカレ対称性のみを持つ理論を得るには、余分な対称性のもとで非自明に変換される場（補正場、compensator）を導入し、その場に対して適当なゲージ固定条件を課せばよい。ゲージ固定を行う方法にはいろいろあり、異なる補助場を持つ超重力理論を与える。[38] ここでは、§3 で得られた、極小な補助場の組（一つの複素スカラー場と一つのベクトル場）を与える方法について述べる。

そのために、カイラル多重項を一つ用意する。ウェイトは 0 でなければ何でもよいが、ここでは $n_D = 1$ 、 $n_A = 2/3$ と取っておくことにする。

$$\Phi_{\text{comp}} = (\phi_{\text{comp}}, \chi_{\text{comp}}, F_{\text{comp}}) \quad (4.180)$$

そしてこの成分と、ゲージ場 w_μ に対して次の条件を課すことによってゲージを固定する。

$$\phi_{\text{comp}} = 1, \quad \chi_{\text{comp}} = 0, \quad w_\mu = 0. \quad (4.181)$$

ゲージ固定条件 (4.181) でゲージ変換がどのように固定されているかを見るために、固定されている場に対するゲージ変換を見てみよう。スカラー場 ϕ_{comp} のゲージ変換は

$$\delta\phi_{\text{comp}} = \sigma + \frac{2i}{3}\theta \quad (4.182)$$

である。したがって、 $\delta\phi_{\text{comp}} = 0$ は $\sigma = \theta = 0$ を意味し、この条件によって A および D のゲージ変換が完全に固定されている。

次に、フェルミオン χ_{comp} について見てみよう。(4.181) が成り立つとき、 χ_{comp} の変換則は

$$\delta\chi_{\text{comp}} = 2\widehat{F}_{\text{comp}}\xi - \frac{4i}{3}c_{\mu}\gamma_5\gamma^{\mu}\xi + 4\zeta, \quad (4.183)$$

ゲージ固定条件から従う式 $\delta\chi_{\text{comp}} = 0$ を、 ζ をそのほかの変換パラメータを用いて与える式とみなすと、 S 変換を単独で行う自由度は完全に固定されていることがわかる。また、ゲージ固定条件を保つために Q 変換と同時に次のパラメータによる S 変換を行うことが必要である。

$$\zeta = -\frac{1}{2}\widehat{F}_{\text{comp}}\xi + \frac{i}{3}c_{\mu}\gamma_5\gamma^{\mu}\xi \quad (4.184)$$

さらに w のゲージ変換は、まだ残っているゲージ変換に対しては

$$\delta w_{\mu} = 2(\phi_{\mu}\xi) + 2(\psi_{\mu}\zeta) + 2\epsilon_{K\mu} \quad (4.185)$$

従って、ゲージ固定条件 $\delta w_{\mu} = 0$ を保つためには、 Q 変換と同時に次の K 変換を行う必要がある。

$$\epsilon_{K\mu} = -(\phi_{\mu}\xi) - (\psi_{\mu}\zeta) \quad (4.186)$$

まとめると、ポアンカレ超重力理論の超対称変換はコンフォーマル超重力理論における次の変換に対応している。

$$\begin{aligned} \delta^{(P)} &= \delta_Q + \left(-\frac{1}{2}(\widehat{F}_{\text{comp}}\xi)^a - \frac{i}{3}c_{\mu}\xi_b(\gamma^5\gamma^{\mu})^{ba} \right) S_a \\ &\quad + \left(-(\xi\phi^m) + \frac{1}{2}(\xi\widehat{F}_{\text{comp}}\psi^m) - \frac{i}{3}c_{\mu}(\xi\gamma^5\gamma^{\mu}\psi^m) \right) K_m \end{aligned} \quad (4.187)$$

上記のゲージ固定の結果、固定されずに残っている独立な場は

$$e_{\mu}{}^m, \quad \psi_{\mu}, \quad c_{\mu}, \quad F_{\text{comp}} \quad (4.188)$$

である。これらは、以前超場形式でビアンキ恒等式と拘束条件を解いて得られた場と自由度が丁度一致する。実は、超場形式で現れた補助場 $c_{\mu}^{(\text{sf})}$ および M は超コンフォーマル重力理論のゲージ場 $c_{\mu}^{(\text{sc})}$ と補正場多重項の補助場 F_{comp} と次のように関係している。

$$F_{\text{comp}} = M^*, \quad c_{\mu}^{(\text{sc})} = c_{\mu}^{(\text{sf})}. \quad (4.189)$$

(ここでは二つの c_{μ} を区別するために添え字を付けた。)

変換 (4.187) を重力多重項に含まれる場に対して適用すると、次の超対称変換則を

得る。

$$\begin{aligned}
\delta^{(P)} e_\mu{}^m &= 2(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\
\delta^{(P)} \psi_{L\mu} &= D_\mu^{(\omega)} \xi_L - \frac{i}{6} c_\lambda (\gamma_\mu \gamma^\lambda + 3\gamma^\lambda \gamma_\mu) \xi_L + \frac{1}{2} \gamma_\mu \xi_R F_{\text{comp}}^*, \\
\delta^{(P)} F_{\text{comp}} &= -2(\xi_R \gamma^\mu \psi_{L\mu}) F_{\text{comp}} + \frac{4i}{3} c^\mu (\xi_R \psi_{R\mu}) + \frac{2}{3} (\xi_R \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\mu\nu}), \\
\delta^{(P)} c_\mu &= -i(\xi \gamma_5 \gamma^\rho \psi_{\rho\mu}) - \frac{i}{4} (\xi \gamma_5 \gamma_\mu{}^{\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) - \frac{3i}{2} (\psi_\mu \gamma_5 \widehat{F}_{\text{comp}} \xi) \\
&\quad + 2c_\rho (\xi \gamma^\rho \psi_\mu) - c_\mu (\xi \gamma^\rho \psi_\rho) + \frac{1}{2} c_\rho (\xi \gamma_\mu{}^{\rho\sigma} \psi_\sigma). \tag{4.190}
\end{aligned}$$

これらは、第3章で与えた変換則に完全に一致する。ただし、比較する際には上に変換則を与えたゲージ場 c_μ の添え字は大域座標のものであることに注意しよう。以前に与えた c_m の変換則 (3.109) と比較する場合には $e_\mu{}^m$ の変換による差があることに注意しなければならない。

(4.124) と (4.125) に与えられているカイラル多重項の変換則を用いればカイラル多重項の成分場の超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta^{(P)} \phi &= \xi^{\bar{a}} \chi_{\bar{a}}, \\
\delta^{(P)} \chi_{\bar{a}} &= 2\xi_{\bar{a}} F + 2(\gamma^m)_{\bar{a}}{}^b \xi_b D_m^{(P)} \phi - 3n_A \xi_{\bar{a}} F_{\text{comp}} \phi, \\
\delta^{(P)} F &= \xi^{\underline{a}} (\gamma^m)_{\underline{a}}{}^{\bar{b}} \left(D_m^{(P)} \chi_{\bar{b}} + \frac{i}{3} c_m \chi_{\bar{b}} \right) - \xi^{\bar{a}} \chi_{\bar{a}} F_{\text{comp}} + \frac{3n_A}{2} \xi^{\bar{a}} \chi_{\bar{a}} F_{\text{comp}} \\
&\quad + n_A \phi \xi^{\underline{a}} (\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{a}}{}^{\bar{b}} (-3\psi_{\bar{m}\bar{b}} F_{\text{comp}} - 2i(\gamma^\lambda)_{\bar{b}}{}^c \psi_{m\underline{c}} c_\lambda - 6\phi_{\bar{m}\bar{b}}) \tag{4.191}
\end{aligned}$$

ただし、上記の超対称変換則に対応した超共変化を

$$D_\mu^{(P)} = \partial_\mu - \delta_M(\omega_{\mu mn}) - \delta_Q^{(P)}(\psi_\mu) \tag{4.192}$$

によって定義した。カイラル多重項の成分場 ϕ と χ に対しては次のように作用する。

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(P)} \phi &= \partial_\mu \phi - \psi_\mu^{\bar{a}} \chi_{\bar{a}}, \\
D_\mu^{(P)} \chi_L &= \partial_\mu \chi_L + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{pq} \gamma_{pq} \chi_L \\
&\quad - 2\psi_{L\mu} F - 2\gamma^\lambda \psi_{R\mu} D_\lambda^{(P)} \phi + 3n_A \psi_{L\mu} F_{\text{comp}} \phi, \tag{4.193}
\end{aligned}$$

これらは $n_A = 0$ の場合には前の章で超場形式を用いて得られたカイラル多重項の変換則 (3.128) および共変化された微分 (3.129) に完全に一致する。つまり、ポアンカレ超重力理論のカイラル多重項に直接対応するのはウェイトが 0 のカイラル多重項である。これ以外のウェイトを持つ多重項は、次のようにポアンカレ超重力理論のカイラル多重項に補正場が掛けられたものであると解釈する。つまり、一般のワイルウェイト n_D を持つコンフォーマル超重力理論のカイラル多重項 $\Phi^{(n_D)}$ は、ポアンカレ

超重力理論におけるカイラル多重項 $\Phi^{(0)}$ と次の関係にある。

$$\Phi^{(n_D)} = \Phi_{\text{comp}}^{n_D} \Phi^{(0)} \quad (4.194)$$

反カイラル多重項から運動多重項を作るためには、反カイラル多重項のワイルウェイトは 1 でなければならず、できる運動多重項のワイルウェイトは 2 である。したがって、常にウェイトが 0 のカイラル多重項を用いることにすると、適宜補正場を挿入することによってウェイトの調節を行う必要がある。例えば、ウェイトが 0 のカイラル多重項 Φ の複素共役から運動多重項を構成し、さらにウェイトを 0 に戻したものを $\tilde{\Phi}$ と書くことにすると、これらは次のように関係している。

$$\tilde{\Phi} = \Phi_{\text{comp}}^{-2} T(\Phi_{\text{comp}}^* \Phi^*) \quad (4.195)$$

$\tilde{\Phi}$ と Φ の成分場間の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= F^* + F_{\text{comp}}^* \phi^*, \\ \tilde{\chi}^{\bar{a}} &= -(\gamma^\mu)^{\bar{a}}_{\underline{b}} D_\mu^{(c)} \chi^{\underline{b}} |_{F^* \rightarrow F^* + \phi^* F_{\text{comp}}^*}, \\ \tilde{F} &= D_m^{(c)} D^{(c)m} \phi^* |_{F^* \rightarrow F^* + \phi^* F_{\text{comp}}^*} - 2F_{\text{comp}}(F^* + F_{\text{comp}}^* \phi^*) \end{aligned} \quad (4.196)$$

が得られる。これらは以前に超場形式を用いて得られた (3.176) と比較されるべきものである。

ただし、(4.196) に含まれる共変微分は、ウェイトが $n_D = 1$ の場に対するものであり、以前に与えた展開式で成分場で展開した後に F^* を $F^* + \phi^* F_{\text{comp}}^*$ に置き換えるものである。たとえば、 χ の共変微分は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} D_\mu^{(c)} \phi &= D_\mu^P \phi - \frac{2i}{3} c_\mu \phi, \\ D_\mu^{(c)} \chi |_{F^* \rightarrow F^* + \phi^* F_{\text{comp}}^*} &= D_\mu^P \chi + \frac{i}{3} c_\mu \gamma_5 \chi - 4\hat{\phi} \left(\phi_\mu + \frac{1}{2} \hat{F}_{\text{comp}} \psi_\mu + \frac{i}{3} \gamma_5 \zeta \psi_\mu \right) \end{aligned} \quad (4.197)$$

右辺のこの中身の ϕ_μ は (4.69) を用いれば $R_{\mu\nu}^0(Q)$ を用いて書き換えることができる。これを、超場形式のときの $\psi_{\mu\nu}^{(s)}$ で置き換えると括弧の中身全体になる。このことを用いると、上記の $\tilde{\chi}$ が以前に与えた (3.176) と同じになるということは簡単に確認できる。

超対称不変な作用積分については、ウェイトが 0 のカイラル超場 Φ を用いて次のように与えることができる。

$$[\Phi]_F^{\text{Poincare}} = [\Phi_{\text{comp}}^3 \Phi]_F^{\text{Conformal}} \quad (4.198)$$

実際に超共形重力理論の F 項作用の公式 (4.130) に対して $\Phi \rightarrow \Phi_{\text{comp}}^3 \Phi$ という代入を行えばポアンカレ超重力理論の作用の公式 (3.228) を得ることができる。このこと

は、 $\Phi_{\text{comp}}^3 \Phi$ の成分場が次のように与えられることを用いれば簡単にチェックすることができる。

$$\begin{aligned}
\Phi &\rightarrow \Phi_{\text{comp}}^3 \Phi, \\
\phi &\rightarrow \phi, \\
\chi &\rightarrow \chi, \\
F &\rightarrow F + 3F_{\text{comp}}\phi.
\end{aligned} \tag{4.199}$$

ポアンカレ超重力理論の D 項作用と、超共形重力理論の D 項作用は次のように関係している。

$$[V]_D^{\text{Poincare}} = [\Phi_{\text{comp}}^* \Phi_{\text{comp}} V]_D^{\text{Conformal}} \tag{4.200}$$

実際、超共形重力理論の D 項作用 (4.139) から、上記の関係を用いることでポアンカレ超重力理論の D 項作用 (3.177) を得ることができる。この計算をする際には、 $\Phi_{\text{comp}}^* \Phi_{\text{comp}} V$ の成分場が、 V の成分場を用いて以下のように与えられることを用いればよい。

$$\begin{aligned}
V &\rightarrow \Phi_{\text{comp}}^* \Phi_{\text{comp}} V, \\
B &\rightarrow B, \\
\eta &\rightarrow \eta, \\
C &\rightarrow C + F_{\text{comp}} B, \\
C^* &\rightarrow C^* + F_{\text{comp}}^* B, \\
v_m &\rightarrow v_m - \frac{4}{3} c_m B, \\
\lambda &\rightarrow \lambda - \frac{2}{3} c_k \gamma^k \eta + i \gamma_5 \widehat{F}_{\text{comp}}^* \eta, \\
D &\rightarrow D + 2F_{\text{comp}}^* F_{\text{comp}} B + 2F_{\text{comp}} C + 2F_{\text{comp}}^* C^* - \frac{8}{9} c_m c^m B + \frac{4}{3} c_m v^m \\
&\quad - (\psi_m \widehat{F}_{\text{comp}} \gamma^m \eta) + \frac{2i}{3} (\psi_m \gamma_5 \gamma^k \gamma^m \eta) c_k + \frac{1}{3} (\psi_{mn}^{(MDA)} \gamma^{mn} \eta)
\end{aligned} \tag{4.201}$$

補正場を用いることで、超場形式によって得られた、超対称不変作用の構成に必要な全ての公式を再現することができた。従って、具体的な作用の構成は前章で行ったのと全く同様に行うことができる。以下の節で幾つかの例を挙げる。

4.13 超ワイル変換と補正場

D 項作用および F 項作用に対する超ワイル変換 (3.276) を、超共形重力理論の言葉で書き換えると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta_U[\Phi_{\text{comp}}^* \Phi_{\text{comp}} V]_D^{\text{Conformal}} &= -\frac{1}{3}[\Phi_{\text{comp}}^* \Phi_{\text{comp}}(U + U^*)V]_D^{\text{Conformal}}, \\ \delta_U[\Phi_{\text{comp}} \Phi]_F^{\text{Conformal}} &= -[\Phi_{\text{comp}}^3 U \Phi]_F^{\text{Conformal}}.\end{aligned}\quad (4.202)$$

これは、

$$\delta'_U \Phi_{\text{comp}} = -\frac{1}{3} U \Phi_{\text{comp}} \quad (4.203)$$

という変換として解釈することができる。より正確には、超ワイル変換は、この変換と、ポアンカレゲージを回復するための超共形ゲージ変換の組み合わせとして与えられる。上記の δ'_U 変換は補正場の成分を次のように変化させる。

$$\delta'_U \phi_{\text{comp}} = -\frac{1}{3} u, \quad \delta'_U \chi_{\text{comp}} = -\frac{1}{3} \chi U, \quad \delta'_U F_{\text{comp}} = -\frac{1}{3} (F_U + u F_{\text{comp}}). \quad (4.204)$$

これをポアンカレゲージに戻すには、次のパラメータによる DASK ゲージ変換を行えばよい。

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{Re } u, \quad \theta = \frac{1}{2} \text{Im } u, \quad \zeta = \frac{1}{12} \chi U, \quad \epsilon_{Km} = -\frac{1}{2} \partial_m \sigma + \psi_m \zeta. \quad (4.205)$$

K 変換は Φ_{comp} には作用しないが、 $w_\mu = 0$ というゲージを保つために必要である。これらのパラメータによる超共形ゲージ変換を δ_g と書けば、超ワイル変換は $\delta_U = \delta'_U + \delta_g$ によって与えられる。これにより、重力多重項の成分場に対する超ワイル変換 (3.274) が再現されることは簡単に確認できる。

このように、超ワイル変換が、補正場に対する変換 (4.203) とみなせることを用いれば、ゲージ不変ではないケーラーポテンシャルを持つような理論の作用を与えるのは簡単である。超場形式で与えた (3.284) は次のように書き換えることができる。

$$S = -\frac{3}{k^2} \left[\Phi_{\text{comp}}^* \Phi_{\text{comp}} \exp -\frac{k^2}{6} (K(\Phi, \Phi^*) + \Gamma(\Phi, \Phi^*, V)) \right]_D^{\text{Conformal}} \quad (4.206)$$

超場形式では、ゲージ変換とともに (3.287) をパラメータとする超ワイル変換を行うことで作用を不変に保つことができた。これは、超共系形式では、ゲージ変換のもとで補正場を次のように変換することで実現することができる。

$$\delta_{\text{gauge}} \Phi_{\text{comp}} = \frac{ik^2}{6} \Lambda^a f_a \Phi_{\text{comp}} \quad (4.207)$$

正確には、上でも述べたように、ポアンカレゲージを保つための超共形ゲージ変換を同時に行う必要がある。

簡単な例として、カイラル超場を含まない、FI パラメータを持つ理論を考えてみよう。以前に超場形式で与えた FI 項を導入した超重力理論の作用 (3.298) を超共形重力理論の言葉で書き換えてみると、次のようになる。

$$S = -\frac{3}{k^2} [e^{(k^2/3)V}]_D^{\text{Poincare}} = -\frac{3}{k^2} [\Phi_{\text{comp}}^* e^{(k^2/3)V} \Phi_{\text{comp}}]_D^{\text{Conformal}} \quad (4.208)$$

作用のこの形は補正場が $U(1)$ チャージ

$$q = -\frac{k^2}{6}\zeta \quad (4.209)$$

を持っていることを表している。超ポテンシャル項は、このようなチャージを持つ補正場を用いて

$$S = [W(\Phi)]_F^{\text{Poincare}} + \text{c.c.} = -[\Phi_{\text{comp}}^3 W(\Phi)]_F^{\text{Conformal}} + \text{c.c.} \quad (4.210)$$

と与えられる。従って、作用がゲージ不変であるためには、 W が電荷 $-3q = k^2\zeta/2$ を持つ必要がある。このことは、以前にワイル変換を用いて導いた結果と一致する。

付録 A 表記法など

A.1 添え字について

添え字の使い方については、以下の原則に従う。

- 実空間の大域座標添え字 (x^μ など)

$$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \dots \quad (\text{A.1})$$

- 実空間の局所直交座標添え字 $\omega_{\mu mn}$ など

$$k, l, m, n, p, q, r, s, \dots \quad (\text{A.2})$$

- グラスマン座標の大域座標添え字 (θ^α など)

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \dots \quad (\text{A.3})$$

- グラスマン座標の局所直交座標添え字 (D_a など)

$$a, b, c, d, e, f, \dots \quad (\text{A.4})$$

さらに、カイラリティを指定したい場合には上下に線をつける。

$$\bar{a}, \underline{b}, \dots \quad (\text{A.5})$$

上線が正の、下線が負のカイラリティを表す。

- 超空間の全大域座標の添え字 (z^M など)

$$K, L, M, N, P, Q, R, S, \dots \quad (\text{A.6})$$

- 超空間の全局所直交座標の添え字 (E_M^A など)

$$A, B, C, D, E, F, \dots \quad (\text{A.7})$$

- 場を区別するための添え字 (Φ^i など)

$$i, j, k, l, m, \dots \quad (\text{A.8})$$

k, l, m などは時空のベクトル添え字と共通なので要注意複素場 Φ^i のエルミート共役を表すために $(\Phi^i)^\dagger = \Phi^{*\bar{i}}$ のように上線つきの添え字 \bar{i} も用いる。

- コンパクトゲージ群の生成子の添え字 (T_a など)

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots \quad (\text{A.9})$$

- 超対称代数の生成子の添え字 (O_X など)

$$X, Y, Z, \dots \quad (\text{A.10})$$

A.2 スピノル

4次元時空の計量として時間方向が負の計量 $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ を用いる。座標の添字は、時間方向が 0、それ以外の空間方向が 1, 2, 3 を用いる。 γ 行列は次のクリフォード代数を満足する 4×4 行列である。

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn} \quad (\text{A.11})$$

直交座標系においては、ベクトル添え字に k, l, m, n, \dots を用いることにする。一般の曲線座標の添え字には $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ を用いることにする。

γ 行列の積を反対称化したものは、複数の添え字を持つ γ によって表す。例えば γ^{mn} は次のように定義される。

$$\gamma^{mn} = \frac{1}{2}(\gamma^m \gamma^n - \gamma^n \gamma^m). \quad (\text{A.12})$$

一般に、添え字を n 個持つ γ の定義は因子 $1/n!$ を含み、常に全体の重みが 1 になるように規格化されている。カイラリティ行列 γ^5 と完全反対称テンソル ϵ^{mnpq} は次の関係式を満足するものとして定義する。

$$\epsilon^{mnpq} = i\gamma^{mnpq}\gamma^5. \quad (\text{A.13})$$

以下で必要なのは関係式 (A.13) だけであり、 ϵ^{0123} の具体的な値 (+1 または -1 である。) を用いることはない。スピノルは 4 成分表示と二成分表示の両方を用いるが、その間の書き換えが簡単になるように、二成分表示のスピノルは 4 成分表示のスピノルの上二つ、またはした二つの成分を単に取り出すことによって得られるような約束

を用いる。特に断らない限り全ての4成分スピノルはマヨラナスピノルである。添え字をあらわに書く場合には a, b, c を用いる。スピノル添え字の省略規則は以下の通り

$$\psi\psi' = \psi^a\psi'_a, \quad \psi\gamma_m\psi' = \psi^a(\gamma_m)_a{}^b\psi'_b, \quad \text{etc.} \quad (\text{A.14})$$

スピノル添え字の上げ下げは荷電共役行列 C^{ab} を用いて次のように定義する。

$$\psi^a = C^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = C_{ab}^{-1}\psi^b. \quad (\text{A.15})$$

片方のカイラリティを抜き出した二成分表示をする必要がある場合には

$$\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi, \quad (\text{A.16})$$

のように添え字 “L” または “R” を用いるか、

$$(\gamma_5\psi)_{\bar{a}} = \psi_{\bar{a}}, \quad (\gamma_5\psi)_{\underline{a}} = -\psi_{\underline{a}}, \quad (\text{A.17})$$

のように片方のカイラリティ成分のみを走るスピノル添え字 \bar{a} または \underline{a} を用いる。たとえば

$$\frac{1}{2}\psi(1+\gamma_5)\psi' = \psi_L\psi'_L = \psi^{\bar{a}}\psi'_{\bar{a}} \quad (\text{A.18})$$

である。スピノルを含む式の複素共役では、全てのカイラリティを逆転させればよい。すなわち、次の式が成り立つ。

$$(\psi_L\psi'_L)^* = (\psi_R\psi'_R)^*, \quad (\psi_L\gamma_m\psi'_R)^* = (\psi_R\gamma_m\psi'_L)^*, \quad \text{etc.} \quad (\text{A.19})$$

この例のように、 γ 行列はあたかも実数のように取り扱うことができる。ただし、 γ_5 は複素共役によって符号が反転する。

$$(\psi\gamma_5\psi')^* = (\psi_L\psi'_L - \psi_R\psi'_R)^* = \psi_R\psi'_R - \psi_L\psi'_L = -\psi\gamma_5\psi'. \quad (\text{A.20})$$

ある複素数 z に対して、次の記号を定義しておくとししばしば便利である。

$$\hat{z} = \text{Re } z + i(\text{Im } z)\gamma_5 = \frac{1+\gamma_5}{2}z + \frac{1-\gamma_5}{2}z^* \quad (\text{A.21})$$

\hat{z} は上記の複素共役演算のもとで不変である。

添え字の上げ下げに用いられる荷電共役行列は上付き添え字を二つ持ち、次の性質を満足する。

$$C^{ba} = -C^{ab}, \quad (\gamma_m)^{ab} = (\gamma_m)^{ba} \quad (\text{A.22})$$

ただし $(\gamma_m)^{ab}$ はスピノルと同様の添え字の上げ下げルールを用いて γ 行列の添え字を上げたもの $(\gamma_m)^{ab} = C^{ac}(\gamma_m)_c{}^b$ である。荷電共役行列 C の二つの上付き添え字を下に下ろしたものは

$$C_{ab} \equiv C_{ac}^{-1}C_{bd}^{-1}C^{cd} = C_{ba}^{-1} = -C_{ab}^{-1} \quad (\text{A.23})$$

のように逆行列の符号を反転したものである。この下付き添え字の C を用いると、添え字の上げ下げルール (A.15) は「常に左上と右下で縮約」というルールにまとめることができる。

$$\psi^a = C^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = \psi^b C_{ba}. \quad (\text{A.24})$$

上付き添え字と下付き添え字を一つずつ持つ荷電共役行列の成分は次のようになる。

$$C_a{}^b = -C^b{}_a = \delta_a^b. \quad (\text{A.25})$$

荷電共役行列が反対称であるために縮約されたスピノル添え字の位置を変えるとマイナス符号が現れる。

$$\psi^a \psi'_a = -\psi_a \psi'^a. \quad (\text{A.26})$$

このことを用いて、スピノルの 2 次形式の転置を取ることができる。たとえば、

$$\psi \gamma_m \psi' = \psi^a (\gamma_m)_a{}^b \psi'_b = -\psi'_b (\gamma_m)^b{}_a \psi^a = -\psi'^b (\gamma_m)_b{}^a \psi_a = -\psi' \gamma_m \psi \quad (\text{A.27})$$

二番目の変形で現れる負号はグラスマン数の入れ替えによるものである。また、(A.22) の二つ目の関係式を用いて γ 行列の二つのスピノル添え字を入れ替えた。三番目の等号で添え字の位置を変えた。縮約された添え字が二箇所あるので、その両方から負号が現れる。同様の変形によって、間に挟む γ 行列の個数が k 個の場合には符号因子 $(-)^k$ が現れることがわかる。従って、転置を行う際には形式的に γ 行列を反対称行列であるかのように扱って覚えておけばよい。

自己双対テンソル $T_{mn}^{(+)}$ および反自己双対テンソル $T_{mn}^{(-)}$ は次の性質を満たすものとして定義される。

$$\frac{i}{2} \epsilon^{mnpq} T_{pq}^{(\pm)} = \pm T_{mn}^{(\pm)}. \quad (\text{A.28})$$

(A.13) を用いると、

$$\epsilon^{mnpq} \gamma_{pq} = i \gamma^{mnpq} \gamma^5 \gamma_{pq} = -2i \gamma^{mn} \gamma^5 \quad (\text{A.29})$$

が得られるが、左あるいは右から $1 \pm \gamma^5$ を掛ければ

$$\frac{i}{2} \epsilon^{mnpq} \gamma_{pq} (1 \pm \gamma^5) = \pm \gamma^{mn} (1 \pm \gamma^5) \quad (\text{A.30})$$

となり $\gamma^{mn} (1 + \gamma^5)$ および $\gamma^{mn} (1 - \gamma^5)$ はそれぞれその反対称ベクトル添え字について自己双対および反自己双対である。ある二階反対称テンソル T_{mn} の自己双対部分および反自己双対部分は次のように取り出すことができる。

$$T_{mn}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(T_{mn} \pm \frac{i}{2} \epsilon_{mnpq} T^{pq} \right) \quad (\text{A.31})$$

4成分スピノルに対するフィルツ変換は次のように与えられる。ただし、この公式には ψ_1 と ψ_2 がグラスマン数であることに由来する負号の寄与が含まれているので、それらがグラスマン偶である場合には負号が逆になる。

$$\begin{aligned}
(\cdots \psi_1)(\psi_2 \cdots) &= -\frac{1}{4}(\cdots 1 \cdots)(\psi_2 \psi_1) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\cdots \gamma_5 \cdots)(\psi_2 \gamma^5 \psi_1) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\cdots \gamma^m \cdots)(\psi_2 \gamma_m \psi_1) \\
&\quad +\frac{1}{4}(\cdots \gamma^m \gamma_5 \cdots)(\psi_2 \gamma_m \gamma^5 \psi_1) \\
&\quad +\frac{1}{8}(\cdots \gamma^{mn} \cdots)(\psi_2 \gamma_{mn} \psi_1) \tag{A.32}
\end{aligned}$$

ベクトル添え字を持つテンソル量があったときに、それぞれのベクトル添え字を二つのスピノル添え字を用いて書き換えるとしばしば式が簡単になる。そのような変換は γ 行列をかけることによって行う。例えば、二階のテンソル T_{mn} に対して

$$T_{(\bar{a}a)(\bar{b}b)} = (\gamma^m)_{(\bar{a}a)}(\gamma^n)_{(\bar{b}b)}T_{mn} \tag{A.33}$$

のように書き換えを行う。以下ではしばしばこのような書き換えを説明抜きで行う。ベクトル添え字をスピノル添え字に書き換える際には以下の公式が便利である。

$$\begin{aligned}
(\gamma^m)_{\bar{a}a}(\gamma_m)_{\bar{b}b} &= -2C_{\bar{a}\bar{b}}C_{ab}, \\
(\gamma^m)_{\bar{a}a}(\gamma_{mn})_{\bar{b}c} &= -C_{\bar{a}\bar{b}}(\gamma_n)_{\bar{a}c} - C_{\bar{a}c}(\gamma_n)_{\bar{a}\bar{b}}, \\
(\gamma^m)_{\bar{a}a}(\gamma^n)_{\bar{b}b}(\gamma_{mn})_{\bar{c}d} &= -2C_{\bar{a}b}(C_{\bar{a}c}C_{\bar{b}d} + C_{\bar{a}d}C_{\bar{b}c}), \\
(\gamma^{mn})_{\bar{a}\bar{b}}(\gamma_{mn})_{\bar{c}d} &= 4(C_{\bar{a}c}C_{\bar{b}d} + C_{\bar{a}d}C_{\bar{b}c}). \tag{A.34}
\end{aligned}$$

任意個の γ 行列の積は、 γ 行列の反対称積と η^{mn} を用いて展開することができる。例えば

$$\gamma^{mn}\gamma^p = \gamma^{mnp} + \gamma^m\eta^{np} - \gamma^n\eta^{mp} \tag{A.35}$$

などである。このような展開を行った結果から、特定の階数の部分を取り出す操作を $\langle \cdots \rangle_n$ のように表す。階数とは、 γ 行列の反対称積の添え字の数であり、 n が取り出したい階数である。例えば、上の例であれば

$$\langle \gamma^{mn}\gamma^p \rangle_3 = \gamma^{mnp}, \quad \langle \gamma^{mn}\gamma^p \rangle_1 = \gamma^m\eta^{np} - \gamma^n\eta^{mp} \tag{A.36}$$

である。複数の階数を取り出したい場合には、取り出したい階数を全て添え字に書くことにする。例えば

$$\gamma^{mn}\gamma^p = \langle \gamma^{mn}\gamma^p \rangle_3 + \langle \gamma^{mn}\gamma^p \rangle_1 = \langle \gamma^{mn}\gamma^p \rangle_{3,1} \tag{A.37}$$

である。

付録 B 主な文献との対応表

B.1 2 成分表示

2 成分表示を用いている代表的な文献である Wess-Bagger との関係を与えておく。Wess Bagger においては、スピノル添え字として $(\bar{\alpha}, \underline{\alpha})$ の代わりに $(\alpha, \dot{\alpha})$ を用いている。 $\dot{\alpha}$ については標準位置が $\underline{\alpha}$ とは逆であるため、書き換える際には上下を入れ替える。たとえば、二成分スピノルは次のように置き換える。

$$\psi_{\bar{\alpha}} \leftrightarrow \psi_{\alpha}, \quad \psi^{\bar{\alpha}} \leftrightarrow \psi^{\alpha}, \quad \psi_{\dot{\alpha}} \leftrightarrow \psi^{\dot{\alpha}}, \quad \psi^{\dot{\alpha}} \leftrightarrow \psi_{\dot{\alpha}}. \quad (\text{B.1})$$

左が我々の表記法であり、右が Wess-Bagger におけるものである。以下同様である。 γ -行列に対応するものとして $\sigma^m, \bar{\sigma}^m$ を用いているが、Wess-Bagger においてこれらの行列は次の関係式を満たす。

$$\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m = -2\eta^{mn}. \quad (\text{B.2})$$

従って我々の γ -行列とは i 倍だけ異なる。

$$(\gamma^m)_{\bar{\alpha}\beta} \leftrightarrow i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m, \quad (\gamma^m)_{\alpha\dot{\beta}} \leftrightarrow i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}. \quad (\text{B.3})$$

また、 σ^{mn} および $\bar{\sigma}^{mn}$ は規格化の仕方が我々の γ^{mn} とは異なることも注意する必要がある。

$$\gamma^{mn} \leftrightarrow -2\sigma^{mn}, -2\bar{\sigma}^{mn}. \quad (\text{B.4})$$

Wess-Bagger において添え字の上げ下げには ϵ 行列を用いる。これは荷電共役行列 C に対応するものであるが、 $\epsilon^{\alpha\beta}$ と $\epsilon_{\alpha\beta}$ は互いの添え字を上げ下げしたものではないことに注意すること。このため、添え字の位置に依存した符号が現れる。

$$C^{\bar{\alpha}\beta} \leftrightarrow \epsilon^{\alpha\beta}, \quad C_{\bar{\alpha}\beta} \leftrightarrow -\epsilon_{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\dot{\beta}} \leftrightarrow \epsilon_{\dot{\alpha}\beta}, \quad C_{\alpha\dot{\beta}} \leftrightarrow -\epsilon^{\dot{\alpha}\beta}. \quad (\text{B.5})$$

カイラル超場の成分場に対して、我々は主に (ϕ, χ, F) を用いた。Wess-Bagger において用いられている成分場 (A, ψ, F) とは次のように対応している。

$$\phi \leftrightarrow A, \quad \chi_L \leftrightarrow \sqrt{2}\psi, \quad \chi_R \leftrightarrow \sqrt{2}\bar{\psi}, \quad F \leftrightarrow F. \quad (\text{B.6})$$

カイラル条件が課されていないスカラー超場については、成分場の間に次の関係がある。

$$\begin{aligned} B &\leftrightarrow C, & \eta_L &\leftrightarrow i\chi, & \eta_R &\leftrightarrow -i\bar{\chi}, & C &\leftrightarrow \frac{1}{2}(M + iN), & C^* &\leftrightarrow \frac{1}{2}(M - iN), \\ v_m &\leftrightarrow v_m, & \lambda_L &\leftrightarrow \lambda, & \lambda_R &\leftrightarrow \bar{\lambda}, & D &\leftrightarrow D. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

また、ゲージ場の強さを含むスピノルカイラル超場については、次の関係がある。

$$W_L \leftrightarrow iW, \quad W_R \leftrightarrow -i\bar{W}. \quad (\text{B.8})$$

超空間上の換率の成分については、上記の添え字の入れ替えだけで我々のものと Wess-Bagger のものは一致する。超重力理論における換率に含まれる超場については次の対応関係がある。

$$\mathcal{R} \leftrightarrow 2R, \quad V_m \leftrightarrow -\frac{3}{2}G_m, \quad T_{mn\bar{\alpha}}^{(4,1)}(\gamma^{mn})_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \leftrightarrow 4W_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}} \quad (\text{B.9})$$

また、重力多重項の成分場については次の関係がある。

$$\psi_{L\mu} \leftrightarrow \frac{1}{2}\psi_\mu, \quad \psi_{R\mu} \leftrightarrow \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu, \quad e_{\hat{\mu}}^{\hat{m}} \leftrightarrow e_m^a, \quad c_\mu \leftrightarrow \frac{1}{2}b_a, \quad F_{\text{comp}} = M^* \leftrightarrow -\frac{1}{3}M^*. \quad (\text{B.10})$$

超対称変換のパラメータとして、Wess-Bagger では大域的な場合に ξ を、局所的な場合に ζ を用いている。これらは我々の変換パラメータ ξ と以下のように対応している。

$$\xi_L \leftrightarrow \xi, -\zeta, \quad \xi_R \leftrightarrow \bar{\xi}, -\bar{\zeta}. \quad (\text{B.11})$$

外微分形式については、Wess-Bagger では成分を次のように定義している。

$$T_k = \frac{1}{k!} dz^{N_k} \wedge \cdots \wedge dz^{N_1} T_{N_1 \cdots N_k} \quad (\text{B.12})$$

これに対し、我々の定義は

$$T_k = \frac{1}{k!} (-)^{\pi(k)} dz^{N_k} \wedge \cdots \wedge dz^{N_1} T_{N_1 \cdots N_k} \quad (\text{B.13})$$

である。ただし、 $\pi(k)$ は k 一列に並んだ k 個のものの順序を逆転させるのに必要な置換の数である。この負号因子はボゾンの座標に対しては

$$T_k = \frac{1}{k!} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} T_{\mu_1 \cdots \mu_k} \quad (\text{B.14})$$

となるように挿入したものであるが、Wess-Bagger においてはこの因子をつけない。また、外微分演算子は、Wess-Bagger においては

$$dT_k = \frac{1}{k!} dz^{N_k} \wedge \cdots \wedge dz^{N_1} (dz^K \partial_K) T_{N_1 \cdots N_k} \quad (\text{B.15})$$

のように、 dz の列の後ろ、成分の前に挿入される演算子として定義される。しかし、我々の定義は

$$dT_k = (dz^K \partial_K) \frac{1}{k!} (-)^{\pi(k)} dz^{N_k} \wedge \cdots dz^{N_1} T_{N_1 \dots N_k} \quad (\text{B.16})$$

のように、左端に挿入される。

Wess Bagger におけるスピン接続 Φ は、共変微分を $DX^A = dX^A + X^B \Phi_B^A$ と与えることで定義される。ここで、 X は局所直交系の添え字 A を持つ外微分形式である。Wess-Bagger においては上で述べたように外微分演算子は右から作用するので、スピン接続も同様に右から作用するものとして定義される。このため、われわれのスピン接続 Ω とは負号が逆になる。

$$\Omega_M \leftrightarrow -\Phi_M, \quad \Omega \leftrightarrow -\Phi. \quad (\text{B.17})$$

Wess Bagger における曲率テンソルの定義は $R = d\Phi + \Phi^2$ である。Wess Bagger で の約束に従って成分で表せば次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} dz^N dz^M R_{MN} &= dz^N dz^M \partial_M \Phi_N + dz^M \Phi_M dz^N \Phi_N \\ &= dz^N dz^M (\partial_M \Phi_N - \Phi_M \Phi_N) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

従って、我々の曲率テンソルとは次の関係にある。

$$R_{MN} \leftrightarrow -R_{MN}, \quad R \leftrightarrow R. \quad (\text{B.19})$$

捩率については、Wess Bagger でも我々同様に $T = DE^A$ によって定義されているので、次の関係式が成り立つ。

$$T_{MN}^A \leftrightarrow T_{MN}^A, \quad T \leftrightarrow -T. \quad (\text{B.20})$$

B.2 4 成分表示

Cremmer らによる論文 [39] との関係を見ておこう。この論文はスピノルの 4 成分表示を用いており、 γ 行列の使い方は基本的に我々のものと同じであると思ってよい。ただ、我々の $\gamma^{\mu\nu}$ に相当する σ^{ab} の規格化には注意が必要である。

$$\gamma^{\mu\nu} \leftrightarrow 2\sigma^{ab} \quad (\text{B.21})$$

変換パラメータは我々の ξ に対して彼らは ϵ を用いている。これらの規格化は同じであるが、重力ティーンについては規格化が異なることに注意しなければならない。そのほかの重力多重項の成分場も含め、以下に関係を与えておく。

$$\xi \leftrightarrow \epsilon, \quad \psi_\mu \leftrightarrow \frac{1}{2}\psi_\mu, \quad e_{\hat{\mu}}^{\hat{m}} \leftrightarrow e_\mu^a, \quad c_\mu \leftrightarrow -\frac{1}{2}A_\mu, \quad F_{\text{comp}} = M^* \leftrightarrow \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}(S - iP). \quad (\text{B.22})$$

カイラル多重項の成分場については次の対応関係がある。

$$\phi \leftrightarrow z = A + iB, \quad \chi \leftrightarrow 2\chi, \quad F \leftrightarrow h' = F' + iG'. \quad (\text{B.23})$$

補助場にプライムがついているのは、共形超重力理論におけるカイラル多重項の補助場と区別するためである。(それらは補正場の作用のためにずれている。)

スカラー超場に対しては成分場の間に次の関係がある。

$$B \leftrightarrow C, \quad \eta \leftrightarrow i\gamma_5\zeta, \quad C \leftrightarrow -\frac{1}{2}\mathcal{H}, \quad v_m \leftrightarrow -B_m, \quad \lambda \leftrightarrow \lambda, \quad D \leftrightarrow D. \quad (\text{B.24})$$

付録C 計算の詳細

C.1 $D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}$ 演算子について

超場形式の超重力理論においてスカラー超場の成分場 D を定義するときに用いられる微分演算子 DPD の性質についてまとめておく。まず、スカラー超場が電荷を持たないときに、この演算子が実であることを示しておこう。

$$\begin{aligned}
 & D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}X - D_{\underline{a}}P_{\text{chiral}}^*D^{\underline{a}}X \\
 = & \frac{1}{4}\{D_{\bar{a}}D_{\underline{b}}\}D^{\underline{b}}D^{\bar{a}}X - \frac{1}{4}D_{\underline{b}}D_{\bar{a}}\{D^{\underline{b}}D^{\bar{a}}\}X + D_{\bar{a}}(\mathcal{R}D^{\bar{a}}X) - D_{\underline{a}}(\mathcal{R}^*D^{\underline{a}}X) \\
 = & \frac{1}{4}R_{\bar{a}\underline{b}}{}^{\underline{b}\underline{d}}D_{\underline{d}}D^{\bar{a}}X + \frac{1}{4}R_{\bar{a}\underline{b}}{}^{\bar{a}\bar{c}}D^{\underline{b}}D_{\bar{c}}X - \frac{1}{2}D_{\bar{a}\underline{b}}D^{\underline{b}}D^{\bar{a}}X + \frac{1}{2}D_{\underline{b}}D_{\bar{a}}D^{\underline{b}\bar{a}}X \\
 & + D_{\bar{a}}(\mathcal{R}D^{\bar{a}}X) - D_{\underline{a}}(\mathcal{R}^*D^{\underline{a}}X) \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

ここで、始めの二つの項の曲率テンソルに展開式を代入すると、二つの項が互いに相殺することがわかる。さらに変形を続けよう。

$$\begin{aligned}
 & D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}X - D_{\underline{a}}P_{\text{chiral}}^*D^{\underline{a}}X \\
 = & -\frac{1}{2}[D_{\bar{a}\underline{b}}, D^{\underline{b}}]D^{\bar{a}}X - \frac{1}{2}D^{\underline{b}}[D_{\bar{a}\underline{b}}, D^{\bar{a}}]X + D_{\bar{a}}(\mathcal{R}D^{\bar{a}}X) - D_{\underline{a}}(\mathcal{R}^*D^{\underline{a}}X) \\
 = & -\frac{1}{2}R_{(\bar{a}\underline{b})}{}^{\underline{b}\bar{a}\bar{c}}D_{\bar{c}}X + \frac{1}{2}T_{\bar{a}\underline{b}}{}^{\underline{b}\underline{c}}D_{\bar{c}}D^{\bar{a}}X + \frac{1}{2}D^{\underline{b}}(T_{(\bar{a}\underline{b})}{}^{\bar{a}\bar{c}}D_{\bar{c}}X) \\
 & + D_{\bar{a}}(\mathcal{R}D^{\bar{a}}X) - D_{\underline{a}}(\mathcal{R}^*D^{\underline{a}}X) \\
 = & -3T_{\bar{c}}{}^{\bar{c}}D_{\bar{c}}X - \mathcal{R}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}X - \frac{5i}{6}D^{\underline{b}}(V_{\underline{b}}{}^{\bar{c}}D_{\bar{c}}X) + \frac{5i}{6}V_{\bar{a}}{}^{\underline{c}}D_{\underline{c}}D^{\bar{a}}X - D^{\underline{b}}(\mathcal{R}^*D_{\underline{b}}X) \\
 & + D_{\bar{a}}(\mathcal{R}D^{\bar{a}}X) - D_{\underline{a}}(\mathcal{R}^*D^{\underline{a}}X) \\
 = & \left[3T_{\bar{c}}{}^{\bar{c}} + \frac{5i}{6}D^{\underline{b}}V_{\underline{b}}{}^{\bar{c}} + D_{\bar{c}}\mathcal{R} \right] D^{\bar{c}}X \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

ここで、関係式 (3.89) を用いると、最後の表式の括弧の中身が 0 になることがわかる。従って、以下の式が示された。

$$D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}X = D_{\underline{a}}P_{\text{chiral}}^*D^{\underline{a}}X \tag{C.3}$$

場 X がゲージ場と結合している場合についても考えてみよう。 X の初項の $U(1)$ 電荷を q とし、さらに $E^{\bar{a}}$ の $U(1)$ 電荷を ζ とする。ゲージ場の強さに対する $F_{ab} = 0$

という拘束条件のために、(C.1) の式は共変微分を D から \mathcal{D} に置き換えるだけでそのまま成り立つ。変化が現れるのは、(C.2) の式変形の途中で微分の交換関係を計算する際に、ゲージ場の強さに比例した以下の項が現れること、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\mathcal{D}_{\bar{a}b}, \mathcal{D}^b]\mathcal{D}^{\bar{a}}X - \frac{1}{2}\mathcal{D}^b[\mathcal{D}_{\bar{a}b}, \mathcal{D}^{\bar{a}}]X &\rightarrow \frac{i}{2}(q-\zeta)F_{(\bar{a}b)}{}^b\mathcal{D}^{\bar{a}}X + \frac{i}{2}q\mathcal{D}^b(F_{(\bar{a}b)}{}^{\bar{a}}X) \\ &= 2i(q-\zeta)W_{\bar{a}}\mathcal{D}^{\bar{a}}X + 2iq\mathcal{D}^b(W_{\bar{b}}X) \end{aligned} \quad (C.4)$$

そして、(C.2) の最後の表式の括弧の中身が相殺せず、以下のようになることである。

$$3T_{\bar{c}} + \frac{5i}{6}D^bV_{\bar{b}\bar{c}} + D_{\bar{c}}\mathcal{R} = 2i\zeta W_{\bar{c}} \quad (C.5)$$

これらの変更点を取り入れれば、次の式を得る。

$$\mathcal{D}_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}\mathcal{D}^{\bar{a}}X - \mathcal{D}_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}^*\mathcal{D}^{\bar{a}}X = 2iqW_{\bar{a}}\mathcal{D}^{\bar{a}}X + 2iq\mathcal{D}^b(W_{\bar{b}}X) \quad (C.6)$$

この関係式は、電荷を持つ場に対して成分場 D をどのように定義するか任意性があることを表している。しかし、 D 成分を考えるのは通常実の超場に対してのみであるので、このことは問題にはならない。また、 ζ が関係式 (C.6) に露に現れていないので、 $q=0$ であれば $\zeta \neq 0$ であっても演算子 $\mathcal{D}_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}\mathcal{D}^{\bar{a}}$ は実である。

C.2 変換則の導出

スカラー超場の成分場の超対称変換則を求めよう。成分場 B および η については簡単なので、 C^* 成分から見ていくことにする。この成分の定義は

$$C^* = \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^bX|_{\theta=0} \quad (C.7)$$

である。この超対称変換は $D_{\bar{a}}D_{\bar{b}}D^bX$ を含むが、 λ 成分の定義式にある $D_{\bar{b}}D^bD_{\bar{a}}X$ の形に持っていくためには共変微分の交換関係を用いる必要がある。これらの差を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D_{\bar{b}}D^bX - \frac{1}{4}D_{\bar{b}}D^bD_{\bar{a}}X &= \frac{1}{4}\{D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}\}D^bX + \frac{1}{4}D^b\{D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}\}X \\ &= \frac{1}{4}R_{\bar{a}\bar{b}}{}^{bc}D_{\bar{c}}X - \frac{1}{2}D_{\bar{a}\bar{b}}D^bX - \frac{1}{2}D^bD_{\bar{a}\bar{b}}X \\ &= \frac{i}{2}V_{\bar{a}}{}^cD_{\bar{c}}X - D_{\bar{a}\bar{b}}D^bX - \frac{1}{2}T_{(\bar{a}b)}{}^{bc}D_{\bar{c}}X \\ &= -\frac{i}{3}V_{\bar{a}}{}^cD_{\bar{c}}X - D_{\bar{a}\bar{b}}D^bX + \mathcal{R}D_{\bar{a}}X \end{aligned} \quad (C.8)$$

従って、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{4}D_{\bar{a}}D_{\bar{b}}D^bX - P_{\text{chiral}}D_{\bar{a}}X = -\frac{i}{3}V_{\bar{a}}{}^cD_{\bar{c}}X - D_{\bar{a}\bar{b}}D^bX \quad (C.9)$$

この式の $\theta = 0$ 成分から C^* の変換則のうち ξ_L を含む部分が得られる。 ξ_R を含む部分は

$$\frac{1}{4}D_{\underline{a}}D_{\underline{b}}D^{\underline{b}}X = D_{\underline{a}}(P_{\text{chiral}} - \mathcal{R})X = -\mathcal{R}D_{\underline{a}}X \quad (\text{C.10})$$

の $\theta = 0$ 成分から得られる。

ベクトル成分 $v_{\bar{a}\underline{b}} = (\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}}v_m$ は次のように定義される。

$$v_{\bar{a}\underline{b}} = -\frac{i}{2}[\mathcal{D}_{\bar{a}}, \mathcal{D}_{\underline{b}}]V \quad (\text{C.11})$$

従って、変換則は次のものの $\theta = 0$ 成分から得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{c}}v_{\bar{a}\underline{b}} &= -\frac{i}{2}\mathcal{D}_{\bar{c}}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}_{\underline{b}}V + \frac{i}{2}\mathcal{D}_{\bar{c}}\mathcal{D}_{\underline{b}}\mathcal{D}_{\bar{a}}V \\ &= -\frac{i}{2}[\mathcal{D}_{\bar{c}}, \mathcal{D}_{\bar{a}}]\mathcal{D}_{\underline{b}}V - \frac{i}{2}\{\mathcal{D}_{\bar{c}}, \mathcal{D}_{\bar{a}}\}\mathcal{D}_{\underline{b}}V + \frac{i}{2}\mathcal{D}_{\bar{c}}\{\mathcal{D}_{\underline{b}}, \mathcal{D}_{\bar{a}}\}V \\ &= -\frac{i}{2}C_{\bar{c}\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{d}}\mathcal{D}^{\bar{d}}\mathcal{D}_{\underline{b}}V - i\mathcal{D}_{\bar{c}}\mathcal{D}_{\bar{b}\bar{a}}V \\ &= -2iC_{\bar{c}\bar{a}}(P_{\text{chiral}}^* - \mathcal{R}^*)\mathcal{D}_{\underline{b}}V - i[\mathcal{D}_{\bar{c}}, \mathcal{D}_{\bar{b}\bar{a}}]V - i\mathcal{D}_{\bar{b}\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{c}}V \\ &= -2iC_{\bar{c}\bar{a}}(P_{\text{chiral}}^* - \mathcal{R}^*)\mathcal{D}_{\underline{b}}V + iT_{\bar{c}(\bar{b}\bar{a})}^d\mathcal{D}_dV - i\mathcal{D}_{\bar{b}\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{c}}V \\ &= -2iC_{\bar{c}\bar{a}}(P_{\text{chiral}}^* - \mathcal{R}^*)\mathcal{D}_{\underline{b}}V + \left(-C_{\bar{a}\bar{c}}V_{\underline{b}}^{\bar{d}}\mathcal{D}_{\bar{d}}V + \frac{1}{3}V_{\bar{b}\bar{c}}\mathcal{D}_{\bar{a}}V\right) \\ &\quad + iC_{\bar{a}\bar{c}}\mathcal{R}^*\mathcal{D}_{\underline{b}}V - i\mathcal{D}_{\bar{b}\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{c}}V \\ &= -2iC_{\bar{c}\bar{a}}P_{\text{chiral}}^*\mathcal{D}_{\underline{b}}V + \left(C_{\bar{c}\bar{a}}V_{\underline{b}}^{\bar{d}}\mathcal{D}_{\bar{d}}V + \frac{1}{3}V_{\bar{b}\bar{c}}\mathcal{D}_{\bar{a}}V\right) \\ &\quad + iC_{\bar{c}\bar{a}}\mathcal{R}^*\mathcal{D}_{\underline{b}}V - i\mathcal{D}_{\bar{b}\bar{a}}\mathcal{D}_{\bar{c}}V \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

C.3 $P_{\text{chiral}}X$ の成分場

(C.9) より、簡単に次の式が得られる。

$$D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}X - P_{\text{chiral}}D_{\bar{a}}X = -\frac{i}{3}V_{\bar{a}}^cD_{\underline{c}}X - D_{\bar{a}\underline{b}}D^{\underline{b}}X + D_{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \quad (\text{C.13})$$

この式の $\theta = 0$ 成分より、 P_{chiral} によって構成したカイラル超場のフェルミオン成分が次のように得られる。

$$D_L P_{\text{chiral}}X|_{\theta=0} = -i\lambda_L + \mathcal{D}^{(s)}\eta_R - \frac{i}{3}\xi\eta_R + M\eta_L + \chi_L^{\mathcal{R}}B. \quad (\text{C.14})$$

(C.13) をさらに微分すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}P_{\text{chiral}}X - \frac{1}{4}D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}X \\
= & -\frac{i}{12}D_{\bar{a}}(V^{\bar{a}c}D_{\underline{c}}X) + \frac{1}{4}D^{\bar{a}}D_{\bar{a}\underline{b}}D^{\underline{b}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \\
= & -\frac{i}{12}(D_{\bar{a}}V^{\bar{a}c})D_{\underline{c}}X - \frac{i}{12}V^{\bar{a}c}D_{\bar{a}}D_{\underline{c}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}\underline{b}}D^{\bar{a}}D^{\underline{b}}X \\
& -\frac{1}{4}[D_{\bar{a}\underline{b}}, D^{\bar{a}}]D^{\underline{b}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \\
= & -\frac{i}{12}(D_{\bar{a}}V^{\bar{a}c})D_{\underline{c}}X - \frac{i}{12}V^{\bar{a}c}D_{\bar{a}}D_{\underline{c}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}\underline{b}}D^{\bar{a}}D^{\underline{b}}X \\
& +\frac{1}{4}T_{(\bar{a}\underline{b})}{}^{\bar{a}c}D_{\underline{c}}D^{\underline{b}}X + \frac{1}{4}T_{(\bar{a}\underline{b})}{}^{\bar{a}c}D_{\underline{c}}D^{\underline{b}}X - \frac{1}{4}R_{(\bar{a}\underline{b})}{}^{\bar{a}bc}D_{\underline{c}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \\
= & \left(-\frac{i}{12}(D_{\bar{a}}V^{\bar{a}c}) - \frac{3}{2}T^c\right)D_{\underline{c}}X + \left(\frac{1}{4}D_{\bar{a}\underline{b}} + \frac{i}{3}V_{\bar{a}\underline{b}}\right)D^{\bar{a}}D^{\underline{b}}X \\
& -\frac{1}{2}\mathcal{R}^*D_{\underline{b}}D^{\underline{b}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \\
= & \left(-\frac{i}{12}(D_{\bar{a}}V^{\bar{a}c}) - \frac{3}{2}T^c\right)D_{\underline{c}}X \\
& +\left(\frac{1}{4}D_m + \frac{i}{3}V_m\right)\left(2D^mX + \frac{1}{2}(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}}[D^{\bar{a}}, D^{\underline{b}}]X\right) \\
& -\frac{1}{2}\mathcal{R}^*D_{\underline{b}}D^{\underline{b}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \tag{C.15}
\end{aligned}$$

ここで、関係式

$$-\frac{i}{12}(D_{\bar{a}}V^{\bar{a}c}) - \frac{3}{2}T^c = \frac{1}{4}D^c\mathcal{R}^* \tag{C.16}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}P_{\text{chiral}}X \\
= & \frac{1}{4}D_{\bar{a}}P_{\text{chiral}}D^{\bar{a}}X + \frac{1}{2}\left(D_m + \frac{4i}{3}V_m\right)\left(D^mX + \frac{1}{4}(\gamma^m)_{\bar{a}\underline{b}}[D^{\bar{a}}, D^{\underline{b}}]X\right) \\
& +\frac{1}{4}(D^c\mathcal{R}^*)D_{\underline{c}}X - \frac{1}{2}\mathcal{R}^*D_{\underline{b}}D^{\underline{b}}X + \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}(\mathcal{R}X) \tag{C.17}
\end{aligned}$$

従って、この $\theta = 0$ 成分を取ることにより、次の成分場が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}D_{\bar{a}}D^{\bar{a}}P_{\text{chiral}}X|_{\theta=0} \\
= & \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\left(D_m^{(s)} + \frac{4i}{3}c_m\right)\left(D^{(s)m}B - iv^m\right) \\
& +\frac{1}{4}(\chi_R^{\mathcal{R}}\eta_R) - 2M^*C^* + MC + F^{\mathcal{R}}B - \frac{1}{2}(\chi_L^{\mathcal{R}}\eta_L) \tag{C.18}
\end{aligned}$$

$U(1)$ 超空間の場合には (C.15) の三行目の交換関係から

$$-\frac{1}{4}[\mathcal{D}_{\bar{a}\underline{b}}, \mathcal{D}^{\bar{a}}]\mathcal{D}^{\underline{b}}X \rightarrow \frac{i}{4}F_{(\bar{a}\underline{b})}^{(K)\bar{a}}D^{\underline{b}}X = iW_{\underline{b}}^{(K)}D^{\underline{b}}X \tag{C.19}$$

が現れる。(C.16) は $U(1)$ 超空間でも変化しない。また、

$$\chi_L^{\mathcal{R}} = \dots - \frac{4i}{3}\lambda_L^{(K)}, \quad F^{\mathcal{R}} = \dots + \frac{4}{3}D^{(K)} \quad (\text{C.20})$$

であることも考慮すれば

$$\dots + \frac{4}{3}D^{(K)}B - \frac{i}{3}(\lambda^{(K)}\gamma_5\eta) \quad (\text{C.21})$$

という寄与が新たに加わる。結局、 $U(1)$ 超空間においては

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L P_{\text{chiral}} X|_{\theta=0} &= \dots - \frac{4i}{3}\lambda_L^{(K)}B, \\ \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\bar{a}}\mathcal{D}^{\bar{a}} P_{\text{chiral}} X|_{\theta=0} &= \dots + \frac{4}{3}D^{(K)}B - \frac{i}{3}(\lambda^{(K)}\gamma_5\eta) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

という寄与が新たに加わる。

C.4 超場形式における D 項作用 (3.177) の導出

超場形式において、F 項作用の公式に $P_{\text{chiral}}X$ の成分場を代入することにより、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} [X]_D^{\text{Poincare}} = & D + \left(D_m^{(s)} + \frac{4i}{3}c_m \right) \left(D^{(s)m}B - iv^m \right) \\ & + 2M^*C^* + 2MC + 2F^{\mathcal{R}}B + 6M^*MB + \frac{1}{2}(\chi_R^{\mathcal{R}}\eta_R) - (\chi_L^{\mathcal{R}}\eta_L) \\ & + 2\psi_{R\mu}\gamma^\mu \left(-i\lambda_L + \mathcal{D}^{(s)}\eta_R - \frac{i}{3}\mathcal{K}\eta_R + M\eta_L + \chi_L^{\mathcal{R}}B \right) \\ & + 4(C^* + MB)(\psi_{\mu R}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\nu R}) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

この作用は一見複素に見えるが、超場 X が実であれば表面項を除き実であることが知られている。そこでここでは実部だけに注目しよう。まず、(3.112) の $F^{\mathcal{R}}$ を代入し、実部のみを取り出すと

$$\begin{aligned} [X]_D^{\text{Poincare}} = & D + D_m^{(s)}D^{(s)m}B + \frac{4}{3}c_mv^m \\ & + 2M^*C^* + 2MC + \left(-\frac{8}{9}c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3}R_{mn}^{(s)mn} \right) B - \frac{1}{4}(\chi^{\mathcal{R}}\eta) \\ & + \psi_\mu\gamma^\mu \left(-i\gamma_5\lambda + \mathcal{D}^{(s)}\eta - \frac{i}{3}\gamma_5\mathcal{K}\eta + \widehat{M}\eta + \chi^{\mathcal{R}}B \right) \\ & + 2(\psi_\mu\widehat{C}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu) + 2(\psi_\mu\widehat{M}^*\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu)B \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

ここに次のものを代入する。

$$D_m^{(s)} D^{(s)m} B = D_m D^{(s)m} B + \psi_\mu \left(-\frac{1}{2} \widehat{M}^* \gamma^\mu - \frac{i}{3} \gamma_5 \gamma^\mu \xi - \frac{i}{3} \gamma_5 c^\mu \right) \eta - \psi_\mu D^{(s)\mu} \eta, \\ -\frac{1}{4} (\chi^{\mathcal{R}} \eta) = -\frac{1}{6} (\eta \gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\psi_\mu \gamma^\mu \widehat{M} \eta) + \frac{i}{3} c^\mu (\psi_\mu \gamma_5 \eta) \quad (C.25)$$

同類項を整理すると次のものを得る。

$$[X]_D^{\text{Poincare}} = D + D_m D^{(s)m} B + \frac{4}{3} c_m v^m \\ + 2M^* C^* + 2MC + \left(-\frac{8}{9} c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3} R_{mn}^{(s)mn} \right) B - \frac{1}{6} (\eta \gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}) \\ - i(\psi_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \lambda) + (\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} D_\nu^{(s)} \eta) + (\psi_\mu \gamma^\mu \chi^{\mathcal{R}}) B \\ + 2(\psi_\mu \widehat{C} \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) + 2(\psi_\mu \widehat{M}^* \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) B \quad (C.26)$$

さらに次のものを代入する。

$$(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} D_\nu^{(s)} \eta) = (\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} D_\nu \eta) - 2(\psi_\mu \gamma^\mu \psi_\nu) D^{(s)\nu} B \\ - 2(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} \widehat{C} \psi_\nu) + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\rho) v_\nu \quad (C.27)$$

この式の右辺第2項は表面項を除き $-D_\nu D^{(s)\nu} B$ に一致する。従って、整理すると、次の式を得る。

$$[X]_D^{\text{Poincare}} = D + \frac{4}{3} c_m v^m + 2M^* C^* + 2MC \\ + \left(-\frac{8}{9} c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3} R_{mn}^{(s)mn} + (\psi_\mu \gamma^\mu \chi^{\mathcal{R}}) + 2(\psi_\mu \widehat{M}^* \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) \right) B \\ - \frac{1}{6} (\eta \gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}) - i(\psi_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \lambda) + (\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} D_\nu \eta) + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\rho) v_\nu \quad (C.28)$$

さらに (3.108) より得られる

$$-\frac{1}{3} R_{mn}^{(s)mn} = -\frac{1}{3} R_{mn}{}^{mn} - \frac{4}{3} (\psi_\mu \gamma_\nu \psi^{\mu\nu}) - \frac{4i}{3} (\psi_\lambda \gamma_5 \gamma^\lambda \psi_\mu) c^\mu + 2(\psi_\mu \widehat{M}^* \psi^\mu), \\ (\psi_\mu \gamma^\mu \chi^{\mathcal{R}}) = \frac{2}{3} (\psi_\mu \gamma^\mu \gamma^{\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) - 2(\psi_\mu \widehat{M}^* \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_\nu) + \frac{4i}{3} (\psi_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \psi_\nu) c^\nu \quad (C.29)$$

を代入すると、

$$[X]_D = D + \frac{4}{3} c_m v^m + 2M^* C^* + 2MC \\ + \left(-\frac{8}{9} c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3} R_{mn}{}^{mn} + \frac{2}{3} (\psi_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) \right) B \\ - i(\psi_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \lambda) - \frac{1}{6} (\eta \gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}) + (\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} D_\nu \eta) + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\rho) v_\nu \quad (C.30)$$

が得られる。さらに $D\eta$ 項を部分積分すれば

$$\begin{aligned}
[X]_D &= D + \frac{4}{3}c_m v^m + 2M^*C^* + 2MC \\
&+ \left(-\frac{8}{9}c_m c^m + 2MM^* - \frac{1}{3}R_{mn}{}^{mn} + \frac{2}{3}(\psi_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}) \right) B \\
&+ i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\rho) v_\nu + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \lambda) \\
&+ \frac{2}{3}(\psi_{mn} \gamma^{mn} \eta) - (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n)(\psi_k \gamma_5 \eta) \tag{C.31}
\end{aligned}$$

次に、 D 項ラグランジアン⁽¹⁾の虚部が表面項を除き 0 になることを示しておこう。まず、定義式に成分場を代入し、単純に虚部を取れば次の式を得る。

$$\begin{aligned}
\text{Im}[X]_D &= \frac{4}{3}D^{(s)m}(c_m B) - D_m^{(s)}v^m + \frac{3i}{4}(\chi^{\mathcal{R}} \gamma_5 \eta) \\
&+ \psi_\mu \gamma^\mu \left(-\lambda - i\gamma_5 D^{(s)}\eta - \frac{1}{3}\xi\eta - i\gamma_5 \widehat{M}\eta - i\gamma_5 \chi^{\mathcal{R}} B \right) \\
&+ 2i(\psi_{\mu R} \gamma_5 \widehat{C} \gamma^{\mu\nu} \psi_{\nu R}) + 2i(\psi_{\mu R} \gamma_5 \widehat{M}^* \gamma^{\mu\nu} \psi_{\nu R}) B \tag{C.32}
\end{aligned}$$

まず、この式に次の関係式を代入しよう。

$$\begin{aligned}
-D_m^{(s)}v^m &= -D_m v^m + (\psi_\mu \gamma^\mu \lambda) - i(\psi_\mu \gamma_5 D^{(s)\mu} \eta) \\
&+ \frac{1}{3}\psi_\mu (\gamma^\mu \xi + c^\mu) \eta + \frac{i}{2}\psi_\mu \gamma_5 \widehat{M}^* \gamma^\mu \eta, \\
\frac{4}{3}D_m^{(s)}(c^m B) &= \frac{4}{3}D_m(c^m B) - \frac{4}{3}c^m(\psi_m \eta) - \frac{4}{3}(\psi_m \Psi^m) B \tag{C.33}
\end{aligned}$$

ただし Ψ_m は $\delta c_m = \xi \Psi_m$ によって定義され、以下に与えられている。同類項を整理すると、以下のものが得られる。

$$\begin{aligned}
\text{Im}[X]_D &= -D_m v^m + \frac{3i}{2}\psi_\mu \gamma_5 \widehat{M}^* \gamma^\mu \eta \\
&+ \frac{4}{3}D_m(c^m B) - c^\mu(\psi_\mu \eta) - \frac{4}{3}(\psi_\mu \Psi^\mu) B + \frac{3i}{4}(\chi^{\mathcal{R}} \gamma_5 \eta) \\
&+ i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} D_\nu^{(s)} \eta) + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \chi^{\mathcal{R}}) B \\
&+ 2i(\psi_\mu \gamma_5 \widehat{C} \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) + 2i(\psi_\mu \gamma_5 \widehat{M}^* \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) B \tag{C.34}
\end{aligned}$$

さらに次のものを代入する。

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(s)} \eta &= D_\mu \eta - 2\widehat{C} \psi_\mu - i\gamma_5 \xi \psi_\mu - (D_m^{(s)} B) \gamma^m \psi_\mu, \\
\Psi^m &= -i\gamma_5 \gamma_p \psi^{pm} - \frac{i}{4}\gamma_5 \gamma^{mpq} \psi_{pq} - \frac{3i}{2}\gamma_5 \widehat{M}^* \psi^m - c^m \gamma^k \psi_k + \frac{1}{2}c_k \gamma^{mkn} \psi_n \\
\chi^{\mathcal{R}} &= \frac{2}{3}\gamma^{pq} \psi_{Lpq} - 2M \gamma^p \psi_{Rp} - \frac{4i}{3}c^p \psi_{Lp} \tag{C.35}
\end{aligned}$$

$-D_m v^m = -2(\psi_\lambda \gamma^\lambda \psi_\mu) v^\mu$ であることに注意しながら表面項を無視して整理すると、次のものが得られる。

$$\begin{aligned} \text{Im}[X]_D &= i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_{\lambda\nu}) B + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_\nu) (D_\lambda^{(s)} B) \\ &\quad + \frac{i}{2} (\eta \gamma_5 \gamma^{pq} \psi_{pq}) + i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} D_\nu \eta) \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

さらに表面項を無視していく。一行目の第1項は

$$\begin{aligned} &i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_{\lambda\nu}) \\ &= 2i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} D_\lambda \psi_\nu) \\ &= 2i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mln} D_l \psi_n) + i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mln} \psi_k) (T_{ln}^k + 2(\psi_l \gamma^k \psi_n)) \\ &= iD_l (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mln} \psi_n) + i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mln} \psi_k) (T_{ln}^{(s)k} + 2(\psi_l \gamma^k \psi_n)) \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

二行目の第1項は

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2} (\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}) \\ &= i(\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} D_\mu \psi_\nu) \\ &= i(\eta \gamma_5 \gamma^{mn} D_m \psi_n) + \frac{i}{2} (\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \psi_k) (T_{mn}^{(s)k} + 2(\psi_m \gamma^k \psi_n)) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

これは次のように 4-fermi 項になる。

$$\begin{aligned} \text{Im}[X]_D &= iD_\lambda [(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_\nu) B] + iD_\mu (\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) - i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_\nu) (\psi_\lambda \eta) \\ &\quad + 2i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mln} \psi_k) (\psi_l \gamma^k \psi_n) B + i(\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \psi_k) (\psi_m \gamma^k \psi_n) \\ &= 2i(\psi_\kappa \gamma^\kappa \psi_\lambda) (\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_\nu) B \\ &\quad + 2i(\psi_\kappa \gamma^\kappa \psi_\mu) (\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu) - i(\psi_\mu \gamma_5 \gamma^{\mu\lambda\nu} \psi_\nu) (\psi_\lambda \eta) \\ &\quad + 2i(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mln} \psi_k) (\psi_l \gamma^k \psi_n) B + i(\eta \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \psi_k) (\psi_m \gamma^k \psi_n) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

フィルツ変換を用いれば、これが 0 であることがわかる。

C.5 テンソル計算法における D 項作用 (4.139) の導出

運動多重項の成分場 (4.135) を代入してみよう。(4.135) の3つ目の成分の B の微分とベクトル場の組み合わせは、次のように一つにまとめておくと、しばしば計算が楽である。

$$D^{(c)m} B - iv^m = \frac{1}{2} (\gamma^m)^{\bar{a}b} Q_{\bar{a}} Q_b B \quad (\text{C.40})$$

代入すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
S &= e [F + (\psi_{R\mu}\gamma^\mu\chi_L) + 2(\psi_{R\mu}\gamma^{\mu\nu}\psi_{R\nu})\phi] \\
&= e \left[\frac{1}{2}D_m^{(c)}(D^{(c)m}B - iv^m) + \frac{1}{2}D \right. \\
&\quad + (\psi_{R\mu}\gamma^\mu\gamma^m D_m^{(c)}\eta_R) - i(\psi_{R\mu}\gamma^\mu\lambda_L) \\
&\quad \left. + 2(\psi_{R\mu}\gamma^{\mu\nu}\psi_{R\nu})C^* \right] \tag{C.41}
\end{aligned}$$

これが D 項作用の公式であるが、このままでは使いにくいので、部分積分を行って、 V の成分場には微分が作用しない形に変形しよう。まず行うべきは、1 行目の微分の部分積分である。

部分積分には次の恒等式を用いる。

$$\partial_\mu(ee_m^\mu) = ee_m^\mu e_k^\lambda (\partial_\mu e_\lambda^k - \partial_\lambda e_\mu^k) \tag{C.42}$$

まず、共変微分を、微分項と接続項に次のように分解する。

$$eD_m^{(MDA)}X^m = ee_m^\mu\partial_\mu X^m + (MDA) \tag{C.43}$$

(\dots) はここでは括弧の中にとえられた変換についての接続項を表す。ここで恒等式 (C.42) を用いれば

$$eD_m^{(MDA)}X^m = \partial_\mu(ee_m^\mu X^m) - ee_m^\mu e_k^\lambda (\partial_\mu e_\lambda^k - \partial_\lambda e_\mu^k)X^m + (MDA) \tag{C.44}$$

ここで、 X^m がワイルウェイト 3、カイラルウェイト 0 の場合を考えると、次のように書き換えることができる。

$$eD_m^{(MDA)}X^m = \partial_\mu(ee_m^\mu X^m) - ee_m^\mu e_k^\lambda (D_\mu^{(MDA)}e_\lambda^k - D_\lambda^{(MDA)}e_\mu^k)X^m \tag{C.45}$$

ここで、 $R_{\mu\lambda}^k(P) = 0$ を用いて次のように書き換えることができる。

$$eD_m^{(MDA)}X^m = \partial_\mu(ee_m^\mu X^m) + 2e(\psi_k\gamma^k\psi_m)X^m \tag{C.46}$$

この公式を用いれば、表面項を除き、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}D_m^{(c)}(D^{(c)m}B - iv^m) = e(\psi_k\gamma^k\psi_m)(D^{(c)m}B - iv^m) + (QSK) \tag{C.47}$$

(C.40) を用いれば、 (QSK) 項は次のように与えられる。

$$(QSK) = -\frac{e}{4}(\gamma^m)^{\bar{a}b}(\psi_m^c Q_c + \phi_m^c S_c + f_m^k K_k)Q_{\bar{a}}Q_b \tag{C.48}$$

B のワイルウェイトが 2 であることを用いれば

$$\begin{aligned}
(QSK) &= \left[\frac{i}{2}(\psi_{Lm}\gamma^m\lambda_R) - (\psi_{Rm}D^{(c)m}\eta_R) + \frac{i}{2}(\psi_{Rm}\gamma^m\lambda_L) \right. \\
&\quad \left. + 2(\phi_{Lm}\gamma^m\eta_R) - (\phi_{Rm}\gamma^m\eta_L) + 2f_m^m B \right] \tag{C.49}
\end{aligned}$$

ここまでの結果をまとめると、

$$\begin{aligned}
S = & e \left[\frac{1}{2} D + (\psi_k \gamma^k \psi_m) (D^{(c)m} B - i v^m) + 2 f_m^m B \right. \\
& + \frac{i}{2} (\psi_m \gamma_5 \gamma^m \lambda) + 2 (\psi_{R\mu} \gamma^{\mu\nu} \psi_{R\nu}) C^* \\
& \left. + (\psi_{Rm} \gamma^{mn} D_n^{(c)} \eta_R) + 2 (\phi_{Lm} \gamma^m \eta_R) - (\phi_{Rm} \gamma^m \eta_L) \right] \quad (C.50)
\end{aligned}$$

次に $D_m^{(c)} \eta$ を含む項について部分積分を行おう。これは次のようになる。

$$e(\psi_{Rm} \gamma^{mn} D_n^{(c)} \eta_R) = e D_n^{(MDA)} (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) - e (D_n^{(MDA)} \psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) + (QSK) \quad (C.51)$$

この右辺の 3 つの項はそれぞれ次のように変形する。

まず第 1 項は (C.46) を用いて

$$e D_n^{(MDA)} (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) = 2e (\psi_k \gamma^k \psi_n) (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) \quad (C.52)$$

第 2 項については

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}(Q) &= D_\mu^{(MDA)} \psi_\nu - D_\nu^{(MDA)} \psi_\mu - \gamma_\mu \phi_\nu + \gamma_\nu \phi_\mu \\
&= e_\mu^m e_\nu^n (D_m^{(MDA)} \psi_n - D_n^{(MDA)} \psi_m) \\
&\quad + (D_\mu^{(MDA)} e_\nu^k - D_\nu^{(MDA)} e_\mu^k) \psi_k - \gamma_\mu \phi_\nu + \gamma_\nu \phi_\mu \\
&= e_\mu^m e_\nu^n (D_m^{(MDA)} \psi_n - D_n^{(MDA)} \psi_m) \\
&\quad + (R_{\mu\nu}{}^k(P) + 2\psi_\mu \gamma^k \psi_\nu) \psi_k - \gamma_\mu \phi_\nu + \gamma_\nu \phi_\mu \quad (C.53)
\end{aligned}$$

を用いると、

$$D_m^{(MDA)} \psi_n - D_n^{(MDA)} \psi_m = R_{mn}(Q) - 2(\psi_m \gamma^k \psi_n) \psi_k + \gamma_m \phi_n - \gamma_n \phi_m \quad (C.54)$$

が成り立つので、これを代入することにより

$$-e(D_n^{(MDA)} \psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) = -(\psi_m \gamma^k \psi_n) (\psi_{Rk} \gamma^{mn} \eta_R) - 3(\phi_{Lm} \gamma^m \eta_R) \quad (C.55)$$

第 3 項、すなわち (QSK) 項は

$$(QSK) = -(\psi_{Rm} \gamma^{mn} \gamma^k \psi_{Ln}) (D_k^{(c)} B - i v_k) - 2(\psi_{Rm} \gamma^{mn} \psi_{Rn}) C^* - 4(\psi_{Rm} \gamma^{mn} \phi_{Rn}) B \quad (C.56)$$

これらを代入してみよう。

$$\begin{aligned}
S = & e \left[\frac{1}{2} D + 2 f_m^m B + \frac{i}{2} (\psi_m \gamma_5 \gamma^m \lambda) - (\phi_m \gamma^m \eta) - \frac{i}{2} (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) v_k \right. \\
& + \frac{1}{2} (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) D_k^{(c)} B - 4 (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \phi_{Rn}) B \\
& \left. + 2 (\psi_k \gamma^k \psi_n) (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) - (\psi_m \gamma^k \psi_n) (\psi_{Rk} \gamma^{mn} \eta_R) \right] \quad (C.57)
\end{aligned}$$

最後に $D^{(c)}B$ を含む項について部分積分を実行しよう。(C.46) と (C.54) を用いてこれまでと同様の式変形を行えば、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{e}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) D_k^{(c)} B \\
= & e(\psi_l \gamma^l \psi_k)(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) B - e(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} D_k^{(MDA)} \psi_n) B + (QSK) \\
= & e(\psi_l \gamma^l \psi_k)(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) B + e(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_l)(\psi_k \gamma^l \psi_n) B \\
& - 2e(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mn} \phi_n) B - \frac{e}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n)(\psi_k \eta)
\end{aligned} \tag{C.58}$$

これを代入することにより次の作用が得られる。

$$\begin{aligned}
S = & e \left[\frac{1}{2} D + 2f_m{}^m B - 2(\psi_m \gamma^{mn} \phi_n) B \right. \\
& + \frac{i}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^m \lambda) - \frac{i}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) v_k \\
& - (\phi_m \gamma^m \eta) - \frac{1}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n)(\psi_k \gamma_5 \eta) \\
& + (\psi_l \gamma^l \psi_k)(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) B + (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_l)(\psi_k \gamma^l \psi_n) B \\
& - (\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n)(\psi_{Rk} \eta_R) + 2(\psi_k \gamma^k \psi_n)(\psi_{Rm} \gamma^{mn} \eta_R) \\
& \left. - (\psi_m \gamma^k \psi_n)(\psi_{Rk} \gamma^{mn} \eta_R) \right]
\end{aligned} \tag{C.59}$$

この式の最後の 3 行が 0 であることは、フィルツ変換を用いれば示すことができる。さらに f と ϕ に代入すると、最終的に次の式が得られた。

$$\begin{aligned}
S = & e \left[\frac{1}{2} D - \frac{1}{6} R_{mn}^{(\omega)mn} + \frac{1}{3}(\psi_m \gamma^{mnp} \psi_{np}^{(MDA)}) \right. \\
& + \frac{i}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^m \lambda) - \frac{i}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n) v_k \\
& \left. + \frac{1}{6}(\psi_{mn}^{(MDA)} \gamma^{mn} \eta) - \frac{1}{2}(\psi_m \gamma_5 \gamma^{mnk} \psi_n)(\psi_k \gamma_5 \eta) \right]
\end{aligned} \tag{C.60}$$

これは (4.139) に与えた作用に他ならない。

C.6 ゲージ場の運動項 (3.241) の導出

(3.140) に与えられた W_L^2 の成分場を F 項作用の公式 (3.174) に代入して得られる式 (3.240) から出発しよう。共形不変性を反映して、(3.240) は補助場 M^* を含まない。さらに、(3.142) に与えられている $D^{(s)}\lambda$ の具体的表式を代入すると、次のよう

に補助場 D の線形項が相殺する。

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta \mathcal{E} W_L^2 &= \int d^4x e \left[-\frac{1}{2} F_{mn}^{(s)(+)} F^{(s)(+)mn} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} F_{mn}^{(s)} \left((\psi_{Rk} \gamma^k \gamma^{mn} \lambda_L) + (\psi_{Rk} \gamma^{mn} \gamma^k \lambda_L) \right) \\
&\quad \left. - (\lambda_L \gamma^k \mathcal{D}_k \lambda_R) + \frac{1}{2} D^2 - i(\lambda_L \not{\epsilon} \lambda_R) - (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \psi_{Rn})(\lambda_L \lambda_L) \right]
\end{aligned} \tag{C.61}$$

さらに (3.142) に与えられている $D^{(s)}\lambda$ の具体的表式を代入する。その際に、

$$\begin{aligned}
F_{mn}^{(s)} &= F_{mn} - (\psi_m \gamma_n \lambda) + (\psi_n \gamma_m \lambda) \\
&= F_{mn} - \frac{1}{2} (\psi_k \gamma^k \gamma_{mn} \lambda) + \frac{1}{2} (\psi_k \gamma_{mn} \gamma^k \lambda)
\end{aligned} \tag{C.62}$$

のように変形しておく、添え字 mn についての自己双対部分を取り出しやすい。

$$F_{mn}^{(s)(+)} = F_{mn}^{(+)} - \frac{1}{2} (\psi_{Rk} \gamma^k \gamma_{mn} \lambda_L) + \frac{1}{2} (\psi_{Lk} \gamma_{mn} \gamma^k \lambda_R) \tag{C.63}$$

自己双対な反対称添え字と反自己双対な反対称添え字を縮約したものは消えることに注意しながらこれらを代入して整理すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta \mathcal{E} W_L^2 \\
&= \int d^4x e \left[-\frac{1}{2} F_{mn}^{(+)} F^{(+)(+)mn} - (\lambda_L \gamma^k \mathcal{D}_k \lambda_R) + \frac{1}{2} D^2 - i(\lambda_L \not{\epsilon} \lambda_R) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} F_{mn} (\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) \\
&\quad + \frac{1}{8} (\psi_{Rk} \gamma^k \gamma_{mn} \lambda_L)^2 - \frac{1}{8} (\psi_{Lk} \gamma_{mn} \gamma^k \lambda_R)^2 - \frac{1}{4} (\psi_{Rk} \gamma_{mn} \gamma^k \lambda_L)^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (\psi_{Lk} \gamma^k \gamma_{mn} \lambda_R) (\psi_{Rk} \gamma^{mn} \gamma^k \lambda_L) - (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \psi_{Rn})(\lambda_L \lambda_L) \right]
\end{aligned} \tag{C.64}$$

さらに、 $(F_{mn}^{(+)})^2$ 項は表面項を除き $(1/2)(F_{mn})^2$ に等しいことと、フェルミオン運動項が部分積分を用いて

$$\begin{aligned}
&-\int d^4x e (\lambda_L \gamma^k \mathcal{D}_k \lambda_R) \\
&= \int d^4x e \left[-\frac{1}{2} (\lambda_L \gamma^k \mathcal{D}_k \lambda_R) + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_k \lambda_L \gamma^k \lambda_R) - \frac{1}{2} D_k (\lambda_L \gamma^k \lambda_R) \right] \\
&= \int d^4x e \left[-\frac{1}{2} e (\lambda \gamma^k \mathcal{D}_k \lambda) - (\psi_m \gamma^m \psi_k) (\lambda_L \gamma^k \lambda_R) \right]
\end{aligned} \tag{C.65}$$

と変形できることを用いると、次の作用を得る。

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta \mathcal{E} W_L^2 &= \int d^4x e \left[-\frac{1}{2} F_{mn}^{(+)} F^{(+)(+)mn} - \frac{1}{2} (\lambda \gamma^k \mathcal{D}_k \lambda) + \frac{1}{2} D^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} F_{mn} (\psi_k \gamma^{mn} \gamma^k \lambda) - i(\lambda_L \not{\epsilon} \lambda_R) \right] + S_{4\text{-fermi}}
\end{aligned} \tag{C.66}$$

この作用は 4 フェルミ項を除き実であることが分かる。4 フェルミ項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 S_{4\text{-fermi}} = \int d^4 x e \left[\frac{1}{8} (\psi_{Rk} \gamma^k \gamma_{mn} \lambda_L)^2 - \frac{1}{4} (\psi_{Rk} \gamma_{mn} \gamma^k \lambda_L)^2 - (\psi_{Rm} \gamma^{mn} \psi_{Rn}) (\lambda_L \lambda_L) \right. \\
 - \frac{1}{8} (\psi_{Lk} \gamma_{mn} \gamma^k \lambda_R)^2 \\
 \left. + \frac{1}{4} (\psi_{Lk} \gamma^k \gamma_{mn} \lambda_R) (\psi_{Rk} \gamma^{mn} \gamma^k \lambda_L) - (\psi_m \gamma^m \psi_k) (\lambda_L \gamma^k \lambda_R) \right] \quad (\text{C.67})
 \end{aligned}$$

実はこの 4-フェルミ項もフィルツ変換を用いると実であることを簡単に示すことができる。

関連図書

- [1] J. Bagger and E. Witten, Phys. Lett. B **118** (1982) 103.
- [2] P. Fayet and J. Iliopoulos, “Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors,” Phys. Lett. B **51**, 461 (1974).
- [3] S. Ferrara, J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Multiplets And Superfields,” Phys. Lett. B **51**, 239 (1974).
- [4] S. Ferrara and B. Zumino, Nucl. Phys. B **79**, 413 (1974).
- [5] R. Grimm, M. Sohnius and J. Wess, Nucl. Phys. B **133**, 275 (1978).
- [6] C. M. Hull, A. Karlhede, U. Lindstrom and M. Rocek, Nucl. Phys. B **266**, 1 (1986).
- [7] A. Salam and J. A. Strathdee, “Supergauge Transformations,” Nucl. Phys. B **76**, 477 (1974).
- [8] A. Salam and J. A. Strathdee, “Unitary Representations Of Supergauge Symmetries,” Nucl. Phys. B **80**, 499 (1974).
- [9] A. Salam and J. A. Strathdee, “On Goldstone Fermions,” Phys. Lett. B **49**, 465 (1974).
- [10] A. Salam and J. A. Strathdee, “On Superfields And Fermi-Bose Symmetry,” Phys. Rev. D **11**, 1521 (1975).
- [11] A. Salam and J. A. Strathdee, “Supersymmetry And Nonabelian Gauges,” Phys. Lett. B **51**, 353 (1974).
- [12] A. Salam and J. A. Strathdee, Nucl. Phys. B **86**, 142 (1975).
- [13] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions,” Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).
- [14] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Invariant Extension Of Quantum Electrodynamics,” Nucl. Phys. B **78**, 1 (1974).

- [15] J. Wess and B. Zumino, "A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations," Phys. Lett. B **49**, 52 (1974).
- [16] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B **66** (1977) 361.
- [17] A. Salam, J. Strathedee On superfields and Fermi-Bose symmetry, Trieste preprint IC/74/42(May 1974)
- [18] E. Sokatchev, Projection operators and supplementary conditions for superspace with arbitrary spin, Nucl.Phys.B99(1975)96
- [19] J.Bagger, "*Supersymmetric sigma models*" in *Proc. of NATO Conf. on Supersymmetry*, Eds. K. Dietz, R. Flume, G. van Gehlen, V. Rittenberg (Plenum, 1985).
- [20] S. Ferrara, D. Z. Freedman, P. N. Nieuwenhuizen, "*Progress towards a theory of supergravity*", Phys.Rev.**D13**(1976)3214.
- [21] S. Deser, B. Zumino, "*Consistent supergravity*", Phys.Lett.**62B**(1976)335.
- [22] P. K. Townsend, "Cosmological constant in supergravity", Phys.Rev.**D15**(1977)2802.
- [23] E. Witten, J. Bagger, "Quantization of Newton's constant in certain supergravity theories", Phys.Lett.**115B**(1982)202.
- [24] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, A. Van Proeyen, "*Yang-Mills Theories with Local Supersymmetry: Lagrangian, transformation laws and super-Higgs effect*", Nucl.Phys.**B212**(1983)413.
- [25] N. Dragon, "*Torsion and Curvature in Extended Supergravity*", Z.Phys.**C2**(1979)29.
- [26] S.Ferrara and P. van Nieuwenhuizen "The auxiliary fields of supergravity" Phys.Lett.**74B**(1978)333
- [27] K.S.Stelle and P.C.West, "Minimal auxiliary fields for supergravity" Phys.Lett.**74B**(1978)330
- [28] J. Wess, B. Zumino, "The component formalism follows from the superspace formulation of supergravity," Phys.Lett.**79B**(1978)394
- [29] Superfield Lagrangian for Supergravity J. Wess and B. Zumino Phys.Lett.**74B**(1978)51

- [30] R. L. Arnowitt, P. Nath and B. Zumino, “Superfield Densities And Action Principle In Curved Superspace,” Phys. Lett. B **56**, 81 (1975).
- [31] M. T. Grisaru, M. E. Knutt-Wehlau and W. Siegel, “A superspace normal coordinate derivation of the density formula,” Nucl. Phys. B **523**, 663 (1998) [arXiv:hep-th/9711120].
- [32] S. J. J. Gates, M. T. Grisaru, M. E. Knutt-Wehlau and W. Siegel, “Component actions from curved superspace: Normal coordinates and ectoplasm,” Phys. Lett. B **421**, 203 (1998) [arXiv:hep-th/9711151].
- [33] P. Adamietz, P. Binetruy, G. Girardi and R. Grimm, “Supergravity and matter: Linear multiplet couplings and Kahler anomaly cancellation,” Nucl. Phys. B **401**, 257 (1993).
- [34] P. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm and M. Muller, “Coupling The Antisymmetric Tensor To The Supergravity Matter System,” Phys. Lett. B **195**, 389 (1987).
- [35] P. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm and M. Muller, “KAHLER TRANSFORMATIONS AND THE COUPLING OF MATTER AND YANG-MILLS FIELDS TO SUPERGRAVITY,” Phys. Lett. B **189**, 83 (1987).
- [36] M. Muller, “Supergravity In U(1) Superspace With A Two Form Gauge Potential,” Nucl. Phys. B **264**, 292 (1986).
- [37] M.Kaku, P.K.Townsend, P.van Nieuwenhuisen “Properties of conformal supergravity” Phys.Rev.D17(1978)3179
- [38] “Conformal and Poincaré tensor calculi in $N = 1$ supergravity”, T. Kugo, S. Uehara, Nucl.Phys.B226(1983)49.
- [39] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello and P. van Nieuwenhuisen, “Spontaneous Symmetry Breaking And Higgs Effect In Supergravity Without Cosmological Constant,” Nucl. Phys. B **147**, 105 (1979).



filename:sugra-part1-0911.tex

date:平成 21 年 11 月 8 日