

ツイスターの最近の発展について*

今村 洋介

目次

1	一粒子波動関数	2
1.1	スピノルについての約束	2
1.2	平面波のヘリシティ	3
1.3	ツイスター空間	8
1.4	スカラー場 ($h = 0$)	9
1.5	Cech コホモロジー	10
1.6	スピノル場 ($h = +1/2$)	12
1.7	反自己双対ゲージ場 ($h = +1$)	13
1.8	公式いくつか	16
1.9	運動量空間とツイスター空間との関係	17
1.10	共形代数	19
1.11	超対称化	20
2	散乱振幅	22
2.1	波動関数と散乱振幅	22
2.2	3点相互作用	23
2.3	ツイスター空間上の局所的相互作用	25
2.4	$\mathcal{N} = 4$ SYM と hCS	29
2.5	MHV 振幅	32
2.6	弦理論による解釈	35
2.7	MHV 頂点 (disconnected prescription)	35
2.8	計算例 ($-, -, -, +$)	36
2.9	振幅の共変性について	37
2.10	プロパゲータの導出	39
2.11	MHV 振幅以外への一般化 (connected prescription)	40
2.12	パリティ不変性	43

*注意：このノートはかなりいい加減です。数係数、符号、 i などは、書くのが面倒だと思ったところでは躊躇無く省略しています。また、時空計量の符号に依存するような議論はほとんど省いています。さらに、添え字の使い方もページによって異なります。暇があればちょっとずつ直していきます。

1 一粒子波動関数

1.1 スピノルについての約束

まず複素リー群 $SO(4, \mathbb{C}) \sim SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ のスピノルについて考える。二つの $SL(2, \mathbb{C})$ それぞれの二次元表現 (スピノル) の添え字を点なしおよび点付き添え字を用いて表すことにする。点なし添え字を持つスピノルのカイラリティを正、点付き添え字を持つスピノルのカイラリティを負と定義する。

$$\text{positive chirality spinor} : \psi^a, \quad \text{negative chirality spinor} : \psi^{\dot{a}}. \quad (1)$$

添え字の上げ下げには $SL(2, \mathbb{C})$ 不変な反対称行列 ϵ を用いる。

$$\psi_a = \epsilon_{ab}\psi^b, \quad \psi_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\psi^{\dot{b}}. \quad (2)$$

$\epsilon_{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = \epsilon^{12} = \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1$ である。 ϵ_{ab} は上記のルールに従って ϵ^{ab} の添え字を下げたものとみなすこともできる。カイラリティが異なる二つのスピノルから 4 次元複素ベクトルを作るための不変テンソルを $(\sigma^\mu)^{ab}$ とする。これは例えば次のように与えることができる。

$$(\sigma^\mu)^{ab} = (1, i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z) \quad (3)$$

スピノル添え字を入れ替えたものは $(\sigma^\mu)^{\dot{b}a} = (\sigma^\mu)^{ab}$ によって定義する。さらに、添え字の上げ下げのルールを用いると、

$$(\sigma^\mu)_{\dot{a}a} = -\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}(\sigma^\mu)^{\dot{b}b}\epsilon_{ba} = (1, -i\sigma_x, -i\sigma_y, -i\sigma_z) \quad (4)$$

が得られる。ディラックスピノルを、上二成分が ψ^a 、下二成分が $\chi_{\dot{a}}$ であるような 4 成分スピノルとして定義すれば、それに作用するディラック行列を次のように作ることができる。

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)^{ab} \\ (\sigma^\mu)_{\dot{a}b} & \end{pmatrix}. \quad (5)$$

このディラック行列は反交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$ を満足する。ディラックスピノルに作用する $SO(4, \mathbb{C})$ の生成子は変換のパラメータを $\Lambda_{\mu\nu} \in \mathbb{C}$ として $T_\Lambda = (1/4)\Lambda_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$ と与えられる。

変換パラメータ $\Lambda_{\mu\nu}$ の成分を全て実に限れば、群は $SO(4)(= SO(4, \mathbb{R})) \sim SU(2) \times SU(2)$ になる。その場合、生成子 T_Λ は複素共役に対して次の式を満足する。

$$(T_\Lambda)^* = M^{-1}T_\Lambda M, \quad M = \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (6)$$

これは、 ψ^a および $\chi_{\dot{a}}$ の複素共役がそれぞれ下付き点なし添え字、上付き点付き添え字をもつスピノルとして振舞うことを表している。

変換パラメータのうち $\Lambda_{0m} = -\Lambda_{m0}$ ($m = x, y, z$) のみが純虚数、それ以外が実数の場合には、群は $SO(3, 1)$ になる。このとき T は次の性質を満足する。

$$(T_\Lambda)^* = M^{-1}T_\Lambda M, \quad M = \begin{pmatrix} & \epsilon \\ \epsilon & \end{pmatrix}. \quad (7)$$

ただし 1_2 は 2 行 2 列の単位行列を表している。この式は、これは、 ψ^a および $\chi_{\dot{a}}$ の複素共役がそれぞれ上付き点付き添え字、下付き点なし添え字をもつスピノルとして振舞うことを表している。

変換パラメータのうち $\Lambda_{im} = -\Lambda_{mi}$ ($m = x, z, i = 0, y$) のみが純虚数、それ以外が実数の場合には、群は $SO(2, 2) \sim SL(2, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{R})$ になる。生成子は複素共役に対して

$$(T_\Lambda)^* = T_\Lambda \quad (8)$$

を満足する。すなわち行列要素は実数である。従ってスピノル表現は実であり、 ψ^a と $\chi_{\dot{a}}$ の複素共役はそれぞれもとのスピノルと同じ変換性を持つ。

表 1: 計量の符号とスピノルの複素共役

計量	表現	複素共役
(++++)	擬実	$(\psi^a)^* = (\psi^*)_a, \quad (\chi^{\dot{a}})^* = (\chi^*)_{\dot{a}}.$
(+++−)	複素	$(\psi^a)^* = (\psi^*)^{\dot{a}}, \quad (\chi^{\dot{a}})^* = (\chi^*)^a.$
(++−−)	実	$(\psi^a)^* = (\psi^*)^a, \quad (\chi^{\dot{a}})^* = (\chi^*)^{\dot{a}}.$

物理的には $SO(3, 1)$ のコンパクト部分群 $SO(3)$ は空間回転という意味を持つが、そのエルミートな生成子 (スピン) は次のように与えられる。

$$S^{xy} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\sigma_z)^{ab} & \\ & (\sigma_z)_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

(S^{yz} 、 S^{zx} についても同様である。) 従って、上付き点なしスピノルおよび下付き点付きスピノルは空間回転に対して全く同様に変換される。

二つのスピノルの積は次のように書くことにする。

$$\langle \psi, \chi \rangle = \psi^a \chi_a = \epsilon_{ab} \psi^a \chi^b, \quad [\tilde{\psi}, \tilde{\chi}] = \tilde{\psi}^{\dot{a}} \tilde{\chi}_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tilde{\psi}^{\dot{a}} \tilde{\chi}^{\dot{b}}. \quad (10)$$

(添え字をつけなくてもカイラリティが分かるように、点付きスピノルにはちるだをつけることにする。) グラスマン偶なスピノルの場合には、同じスピノルを二つ掛けると ϵ_{ab} の反対称性により 0 になる。

1.2 平面波のヘリシティ

一般のスピン s を持つ粒子の平面波は次のように書くことができる。

$$\psi(x) = \zeta e^{ipx}. \quad (11)$$

p は粒子の運動量である。場 ψ はその粒子のスピンに対応する添え字をもつ。このスピンの自由度は偏極 ζ によって表される。 ζ は ψ と同じスピンの添え字を持つが、 x に依存しない定数である。以下では e^{ipx} の係数ということで偏極を $\psi(p)$ とも書く。ここでは質量が 0 すなわち

$$p^2 = 0 \quad (12)$$

を満足する平面波についてのみ考える。

スカラー場 ($h = 0$) スカラー場の場合、場 ψ はスピンの添え字を持たないから、 ζ は単なる数であり、たとえば $\zeta = 1$ と置くことができる。

フェルミオン場 ($h = \pm 1/2$) $s = 1/2$ のスピノル場の場合を考えてみよう。カイラリティが正の場合 $\psi^a(x) = u^a e^{ipx}$ と負の場合 $\psi_{\dot{a}}(x) = v_{\dot{a}} e^{ipx}$ が考えられる。これらに対してディラック方程式は運動量表示で次のように書くことができる。

$$p_{\dot{a}a} u^a = 0, \quad p^{a\dot{a}} v_{\dot{a}} = 0. \quad (13)$$

(13) を満足する状態がそれぞれヘリシティーの固有状態になっていることは、 z 方向へ進む平面波 ($p_0 = p_3 = E$) を考えたときに

$$p_{\dot{a}a} = p_{\mu} \sigma_{\dot{a}a}^{\mu} = \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

であり、(13) を満足する偏極が $(u^1, u^2) = (0, 1)$ および $(v_1, v_2) = (1, 0)$ と与えられることからわかる。すなわち、 ψ^a はヘリシティー $h = -1/2$ の状態を $\psi_{\dot{a}}$ はヘリシティー $h = +1/2$ の状態を表す波動関数である。

ゲージ場 ($h = \pm 1$) 次に、スピンの $s = 1$ の零質量粒子、すなわちゲージ場について考えてみよう。ここではゲージ群は $U(1)$ であるとし、運動方程式が線形である場合のみを考える。場の強さは次のように分解することができる。

$$F_{\mu\nu} \sim F_{a\dot{a}b\dot{b}} = F_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + F_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{ab} \quad (15)$$

F_{ab} が自己双対部分を、 $F_{\dot{a}\dot{b}}$ は反自己双対部分を表している。どちらも二つのスピノル添え字の入れ替えについて対称である。場の強さ $F_{\mu\nu}$ に対して課される条件は、運動方程式 $\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0$ とビアンキ恒等式 $\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$ の二つであるが、これを F^{ab} および $F_{\dot{a}\dot{b}}$ に対する条件として書き換えると、次のようになる。

$$p_{\dot{a}a} F^{ab}(p) = 0, \quad p^{a\dot{a}} F_{\dot{a}\dot{b}}(p) = 0. \quad (16)$$

z 方向へ進む平面波の場合には p は (14) によって与えられ、(16) は $F^{1a} = 0$ および $F_{2\dot{a}} = 0$ を表している。従って 0 でない成分は F^{22} と $F_{\dot{1}\dot{1}}$ のみであり、これらがそれぞれヘリシティー $h = -1$ および $h = +1$ の固有状態であることがわかる。

グラビティーノ ($h = \pm 3/2$) カイラリティーが正のグラビティーノ ψ_μ^a を考えよう。ゲージ変換は $\delta\psi_\mu^a = \nabla_\mu \epsilon^a$ と与えられる。このゲージ変換で不変な場の強さは $\psi_{\mu\nu}^a = 2\nabla_{[\mu}\psi_{\nu]}^a$ である。二つの下付きベクトル添え字は反対称であり、スピノル添え字を用いれば自己双対部分 ψ_{ab}^c と反自己双対部分 $\psi_{\dot{a}\dot{b}}^c$ とに分解できる。さらに ψ_{ab}^c は γ -トレース部分 ψ_{ab}^b とそれ以外の部分とに分けることができる。こうして 3 つのローレンツ群の規約表現に分解される。

$$\psi_{\mu\nu}^a : [(3, 1) \oplus (1, 3)] \otimes (2, 1) = (4, 1) \oplus (2, 1) \oplus (2, 3). \quad (17)$$

運動方程式 $(\sigma^\mu \psi_{\mu\nu})^{\dot{a}} = 0$ はこれらの成分のうち $(2, 2) \otimes (1, 2) = (2, 1) \oplus (2, 3)$ が 0 であることを意味している。従って、残るのは $(4, 1)$ に属する ψ_{abc} のみである。ただし 3 つのスピノル添え字の入れ替えについて完全対称である。さらにビアンキ恒等式 $\nabla_{[\mu}\psi_{\nu\rho]}^a = 0$ はこの成分が次の式を満足することを意味している。

$$\nabla_{\dot{a}a}\psi^{abc} = 0. \quad (18)$$

z 方向へ進む平面波の場合には $\psi^{1ab} = 0$ を意味している。すなわち 0 でない成分は ψ^{222} だけであり、この状態のヘリシティは $h = -3/2$ である。

カイラリティーが負の場合についても全く同様であり、ヘリシティが $h = +3/2$ の状態を与える。

重力場 ($h = \pm 2$) スピンが $s = 2$ の重力場についてもみておこう。曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の 4 つの添え字は μ と ν 、 ρ と σ の入れ替えに対して反対称である。そこでそれぞれについて $F_{\mu\nu}$ の場合と同様に規約分解すると、全体としては次のように分解できる。

$$\begin{aligned} [(3, 1) \oplus (1, 3)] \otimes [(3, 1) \oplus (1, 3)] &= (5, 1) \oplus (1, 5) \\ &\oplus (3, 3) \oplus (3, 1) \oplus (1, 3) \oplus (1, 1) \\ &\oplus (3, 3) \oplus (1, 1) \end{aligned} \quad (19)$$

ビアンキの第一恒等式 $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$ はこれらの規約成分のうち、 $(2, 2) \otimes (2, 2) = (3, 3) \oplus (3, 1) \oplus (1, 3) \oplus (1, 1)$ が 0 であることを表している。これにより (19) 右辺の二行目は消える。さらに真空中でのアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ は $(3, 3) \oplus (1, 1)$ 成分が 0 であることを表しているから、3 行目も消える。こうして、ワイルテンソルを表す $(5, 1) \oplus (1, 5)$ の部分だけが残る。これらの成分は 4 つの点なし、あるいは点付きの完全対称なスピノル添え字を持った量として表すことができる。すなわち、曲率テンソルが次のように分解できることを意味している。

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}}(\sigma^\rho)_{c\dot{c}}(\sigma^\sigma)_{d\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{c\dot{d}}R_{abcd} + \epsilon_{ab}\epsilon_{cd}R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} \quad (20)$$

ビアンキの第二恒等式 $\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0$ は線形近似でワイルテンソル R_{abcd} および $R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$ に対する運動方程式

$$p_{\dot{a}a}R^{abcd}(p) = 0, \quad p^{a\dot{a}}R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}(p) = 0. \quad (21)$$

を与える。たとえば z 方向に進む重力波を考えれば、0 でない成分は $R^{2222}(p)$ および $R_{\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{1}}(p)$ であり、それぞれヘリシティは $h = -2$ と $h = +2$ である。

以上の例からもわかるように、ヘリシティー h を持った場の線形化された運動方程式は次のように与えられる。

$$\partial_{\dot{a}\dot{a}}\psi^{ab\dots c}(x) = 0 \quad (h \leq -1/2), \quad (22)$$

$$\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{c}}(x) = 0 \quad (h \geq 1/2), \quad (23)$$

$$\partial_{a\dot{a}}\partial^{a\dot{a}}\psi(x) = 0 \quad (h = 0). \quad (24)$$

ただし、 $\psi^{ab\dots c}(x)$ は $-2h = 2|h|$ 個の点なしスピノル添え字を持ち、全ての添え字の入れ替えに対して対称である。同様に $\psi_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{c}}(x)$ は対称な $2h$ 個の点つきスピノル添え字を持つ。

上の説明で、それぞれの場のヘリシティーを決めるために、運動量が z 方向を向いている場合に偏極のどの成分が値を持つかを見た。運動量の向きが一般の場合の偏極を表すためには、運動量を次のようにスピノルの積として表すのが便利である。

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \quad (25)$$

同じスピノルの積 $\langle \lambda, \lambda \rangle$ や $[\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}]$ が 0 であることを用いれば (25) は自動的に on-shell 条件 (12) を満足する。また逆に、 p が (12) を満足し、未来方向を向いていれば常に (25) のように表すことができる。運動量 (25) を持つ平面波 (11) の偏極は、スケールの取り方の自由度を除き次のように与えられる。

$$\zeta^{ab\dots c} = \lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c \quad (h < 0), \quad (26)$$

$$\zeta_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{c}} = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tilde{\lambda}_{\dot{b}} \dots \tilde{\lambda}_{\dot{c}} \quad (h > 0). \quad (27)$$

(25) によって与えられるベクトル p^μ が実であるためにスピノル変数 $(\lambda, \tilde{\lambda})$ が満足すべき条件は計量の符号に依存する。たとえば $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-+++)$ の場合には、 $\tilde{\lambda} = \lambda^*$ を満足すればよい。それに対して $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(- - ++)$ の場合には、 $\lambda = \lambda^*$ および $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*$ が満足されればよい。しかし以下ではほとんど tree レベル振幅のみを議論するので、振幅は常に解析関数であり、自由に解析接続ができると仮定し、運動量が複素数であるとして扱うことにする。そして計量の符号の違いによるスピノルの性質の違いはほとんど気にしないことにする。

(27) および (26) のように与えられる偏極 ζ は次の式を満足する。

$$\deg_\lambda[\zeta] - \deg_{\tilde{\lambda}}[\zeta] = -2h \quad (28)$$

ただし $\deg_X[F]$ は F が X の斉次関数であるときにその次数を表す。スカラー場 ($h = 0$) の場合には偏極がないので単に $\zeta = \text{定数}$ であるが、その場合もやはりこの式が成り立つ。これは運動量 (25) を変えない次のスケール変換のもとでの ζ の次数が $-2h$ であることを意味している。

$$\lambda \rightarrow \alpha\lambda, \quad \tilde{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\alpha}\tilde{\lambda}. \quad (29)$$

以上の議論では、ゲージ場の偏極 ζ は場の強さ $F_{\mu\nu}$ や $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ に対して与えたが、ポテンシャルを平面波として表すことによっても偏極を定義することができる。ここではベクトル場について、ポテンシャルで定義した偏極 ϵ に対しても関係式 (28) はやはり成り立つ

ていることを示しておく。U(1) のゲージポテンシャルを $A_\mu(x) = \epsilon_\mu e^{ipx}$ としたとき、偏極は Maxwell 方程式から得られる横波条件

$$p_\mu \epsilon^\mu = p_{ab} \epsilon^{ab} = 0 \quad (30)$$

を満足するベクトルとして与えられる。ヘリシティが $h = \pm 1$ の状態を表す偏極 ϵ_h は λ と $\tilde{\lambda}$ を用いて次のように与えることができる。

$$\epsilon_{+1}^{ab} = \frac{\mu^a \tilde{\lambda}^b}{\langle \mu, \lambda \rangle}, \quad \epsilon_{-1}^{ab} = \frac{\tilde{\mu}^b \lambda^a}{[\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}]} \quad (31)$$

ここで μ および $\tilde{\mu}$ というスピノルが現れたが、これらは分母を 0 にしない限り任意にとってよいスピノルである。このように与えられた偏極 $\epsilon_{\pm 1}$ が確かに次数の関係式 (28) を満足することはすぐにわかる。

スピノル μ および $\tilde{\mu}$ の取り方はゲージ変換の自由度に対応しており、物理的には μ 、 $\tilde{\mu}$ によらない同じ状態を与えることは次のようにして説明することができる。ここでは ϵ_{+1} のほうに限定して説明する。 μ を少しだけ変化させてみよう。 μ の自由度は 2 つであり、 $\langle \mu, \lambda \rangle \neq 0$ という条件によって μ と λ が同じ方向を向いていないことが保障されているから、任意の変形は $\delta\mu = \alpha\mu + \beta\lambda$ と表すことができる。このうち α による変形は μ のスケール変換であるから ϵ_{+1} を変化させない。 β による変形は $\delta\epsilon_{+1} \propto p$ を与えるが、これはゲージ変換の自由度に相当しており、物理的状态は変化しない。従って上記の ϵ_{+1} を用いて書いた散乱振幅はスピノル μ を含まない。 ϵ_- についても全く同様に $\tilde{\mu}$ がゲージ変換の自由度を表していることを示すことができる。

上記の偏極 $\epsilon_{\pm 1}^\mu$ がヘリシティ ± 1 の状態を表すことは、対応する場の強さを求めて (27) や (26) と比較すればよい。運動量表示での場の強さは $F_{\mu\nu} = p_\mu \epsilon_\nu - p_\nu \epsilon_\mu$ と与えられる。スピノル添え字で表せば、

$$F_{a\dot{a}b\dot{b}}(p) = F_{\mu\nu}(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}}(p) = p_{[a} \{\dot{a} \epsilon_b\}^{\dot{b}} + p_{\{a} [\dot{a} \epsilon_b\}^{\dot{b}]} \quad (32)$$

この式に (25) および (31) を代入して、スピノル変数を用いて表そう。 ϵ_{+1} について見ると、 p も ϵ_{+1} も $\tilde{\lambda}$ を含むから二つの点つき添え字について反対称化すると 0 になる。従って (32) の右辺第 1 項のみが残って、

$$F_{a\dot{a}b\dot{b}}(p) = \frac{1}{\langle \lambda, \mu \rangle} \lambda_{[a} \mu_{b]} \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tilde{\lambda}_{\dot{b}} = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tilde{\lambda}_{\dot{b}} \quad (33)$$

となる。これは場の強さの反自己双対部分が $F_{\dot{a}\dot{b}}(p) = (1/2) \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tilde{\lambda}_{\dot{b}}$ と与えられることを意味しており、 $h = +1$ としたときの偏極 (27) に一致している。さらに、ゲージ変換の自由度に対応していた μ に依存しないこともわかる。

重力波の偏極を計量の微小変化 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ に対して与えたものは次のようになる。

$$\epsilon_{+2}^{a\dot{a}b\dot{b}} = \frac{\mu^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \mu^b \tilde{\lambda}^{\dot{b}}}{\langle \mu, \lambda \rangle^2}, \quad \epsilon_{-2}^{a\dot{a}b\dot{b}} = \frac{\tilde{\mu}^{\dot{a}} \lambda^a \tilde{\mu}^{\dot{b}} \lambda^b}{[\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}]^2} \quad (34)$$

ただし μ と $\tilde{\mu}$ は分母を 0 にしない範囲で自由に取ってよいスピノルである。やはり次数の関係式 (28) は満足されている。

1.3 ツイスター空間

ヘリシティが $h < 0$ の場の運動方程式 (22) の解について再び考えよう。 $\psi^{ab\dots c}(x)$ は点なし添え字を $-2h$ 個持つ。 §1.2 ではまず運動量 p を固定し、平面波の形 (11) を仮定して偏極 ζ を決定するという手順を踏んだが、今度は逆に偏極が (26) のように与えられたときに軌道運動の波動関数がどのような形になるべきかを考えてみよう。波動関数の形を次のように仮定する。

$$\psi^{ab\dots c}(x) = \lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c f(x). \quad (35)$$

λ^a は 0 でない任意のスピンルである。(35) を運動方程式 (26) に代入すれば、軌道部分 $f(x)$ に対して次の微分方程式を得る。

$$\lambda^a \partial_{a\dot{a}} f(x) = 0. \quad (36)$$

この式の一般解は任意の関数 g を用いて $f(x) = g(\lambda_a x^{a\dot{a}})$ と与えられる。そのような関数は、次の δ 関数の重ね合わせとして与えられる。

$$f_{(\lambda, \mu)}(x) = \delta^2(\lambda_a x^{a\dot{a}} + \mu^{\dot{a}}) \quad (37)$$

この δ 関数は、4 次元時空中に α -plane という名前で呼ばれる 2 次元の面を定める。 α -plane を定めるパラメータ (λ, μ) のなす空間をツイスター空間と呼ぶ。 α -plane はスケール変換

$$(\lambda, \mu) \rightarrow (\alpha\lambda, \alpha\mu) \quad (38)$$

で不変であるから、このスケール変換で移りあう点を同一視するほうが便利である。この同一視によって定義される \mathbb{CP}^3 を projective twistor space、あるいは単に twistor space と呼び、 \mathbb{T} という記号で表す。(37) より、 $x \rightarrow \infty$ は、 (λ, μ) 空間の $\lambda^a = 0$ という部分に対応していることがわかる。従って、twistor 空間 \mathbb{T} は正確には \mathbb{CP}^3 ではなく \mathbb{CP}^3 から $\lambda^a = 0$ の部分を除いたものである。この空間は次の二つのパッチで覆うことができる。

$$V_1 = \{z|\lambda^1 \neq 0\}, \quad V_2 = \{z|\lambda^2 \neq 0\}. \quad (39)$$

V_1 と V_2 は位相的にはどちらも \mathbb{C}^3 である。 V_1 と V_2 の共通部分を V_{12} とする。

α -plane ごとに重みをつけて δ 関数 (37) を重ね合わせることで、運動方程式の任意の解を作ることができる。この重みの関数を twistor space 上の波動関数と考えることができる。この波動関数を $\varphi(\lambda, \mu)$ とすると、 x 空間上の運動方程式の解を次のように与えることができる。

$$\psi^{ab\dots c}(x) = \int_{\mathbb{T}} \Omega \lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c \delta^2(\lambda_a x^{a\dot{a}} + \mu^{\dot{a}}) \varphi(\lambda, \mu) \quad (40)$$

Ω は twistor space 上の 3 次元積分の測度で、 $z^I = (\lambda^a, \mu^{\dot{a}})$ と置けば、次のように与えられる。

$$\Omega = \frac{1}{4!} \epsilon_{IJKL} z^I dz^J dz^K dz^L \quad (41)$$

\mathbb{T} は projective space であるから、その上での積分を行うためにはスケール変換で結ばれる同値類の中から代表元を指定するために (λ, μ) の張る 4 次元空間上の 3 次元曲面を選ば

なければならない。その曲面の選び方に積分 (40) が依存しないためには、測度まで含めた被積分関数がスケール変換で不変でなければならない。このためには twistor 空間上の波動関数が次の性質を持たなければならない。

$$\deg_z[\varphi(z)] = 2h - 2 \quad (42)$$

(37) の δ 関数は、 x を一つ決めたとときに、twistor 空間 T 上の一次元部分空間を定める式であるとみなすこともできる。点 x に対するこの部分空間を D_x と書くことにする。 D_x は位相的には T に埋め込まれた P^1 であり、 λ^1 と λ^2 は同時に 0 になることは無いのでこれらを斉次座標として用いることができる。 D_x は二つのパッチで覆うことができる。(39) で定義した V_i を用いて次のように取るのが便利である。

$$U_i = V_i \cap D_x. \quad (43)$$

$U_{12} = U_1 \cap U_2$ とする。式 (40) は、 x 空間の波動関数の点 x での値が D_x 上の波動関数 $\varphi(z)$ から得られることを表している。

(40) の積分測度を $\Omega = \langle \lambda, d\lambda \rangle d^2\mu$ と取り、 μ 積分を実行すれば δ 関数が消えて次のようになる。

$$\psi^{ab\dots c}(x) = \int_C \langle \lambda, d\lambda \rangle \lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c \rho_x \varphi(z) \quad (44)$$

$\langle \lambda, d\lambda \rangle$ は斉次座標を用いて書いた D_x 上の積分測度である。 $\rho_x \varphi(z)$ は $\varphi(z)$ の D_x への制限を意味しており、具体的には次のように書くことができる。

$$\rho_x \varphi(z) = \varphi(\lambda^a, -\lambda_a x^{a\dot{a}}). \quad (45)$$

λ^a は複素数であり、(44) の積分をどのような経路に沿って行えばよいかは自明ではないが、ここでは U_{12} の非自明なサイクルを一周する経路 C にそって行うことにする。(U_{12} は位相的には球面から二点を除いたものに等しい。)

1.4 スカラー場 ($h = 0$)

前の subsection では $h \leq -1/2$ の場合について考えたが、 $h \geq 0$ の場合の運動方程式の解も (42) を満足する twistor 空間上の関数を用いて同様に構成することができる。ここでは $h = 0$ の場合について詳しく見てみよう。

twistor space 上の -2 次の斉次関数 $\varphi(z)$ を用いて零質量クラインゴルドン方程式 (24) を満足するスカラー場 $\phi(x)$ は次の積分として与えられる。

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \rho_x \varphi(z) \langle \lambda d\lambda \rangle \quad (46)$$

積分 measure $\langle \lambda, d\lambda \rangle$ は次数が 2 であり、 $\varphi(z)$ の次数 -2 とあわせれば、全体の次数が 0 なので、 P^1 上の積分として well-defined である。

(46) によって定義した $\phi(x)$ は波動方程式を満足することが、以下のようにして示される。まず、 $\phi(x)$ を時空の座標 $x^{a\dot{a}}$ で微分してみよう。 $\rho_x\varphi(z)$ の x 依存性は (45) のように与えられるから、

$$\begin{aligned}\partial_{a\dot{a}}\phi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}} \varphi(\lambda^a, x_{a\dot{a}}\lambda^a) \langle \lambda d\lambda \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda_a \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \varphi(\lambda^a, \mu^{\dot{a}}) \langle \lambda d\lambda \rangle\end{aligned}\quad (47)$$

となる。さらにもう一度、同様に微分すると、

$$\partial_{b\dot{b}}\partial_{a\dot{a}}\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda_b \lambda_a \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \varphi(\lambda^a, \mu^{\dot{a}}) \langle \lambda d\lambda \rangle \quad (48)$$

得られた式の右辺は従って、 a と b 、あるいは \dot{a} と \dot{b} の入れ替えについて対称であるから、縮約すると 0 になる。すなわち、 $\phi(x)$ は (24) を満足する。

$\varphi(z)$ が与えられると (46) を用いることにより $\phi(x)$ を一意的に決めることができるが、その逆は成り立たず、同じ $\phi(x)$ を与える多くの $\varphi(z)$ が存在する。実際、次の置き換えて $\phi(x)$ は変化しない。

$$\varphi(z) \rightarrow \varphi'(z) = \varphi(z) + h_1(z) - h_2(z). \quad (49)$$

ただし $h_i(z)$ は V_i で正則な、 $\varphi(z)$ と同じ次数を持つ斉次関数である。

従って、 $\varphi'(z) \sim \varphi(z)$ のような同一視を行った同値類を考えるのが自然である。これは twistor space 上の Čech co-homology $\check{H}^1(\mathbf{T}, \mathcal{O}(n))$ を与える。

1.5 Čech コホモロジー

位相空間 X の Čech cohomology は次のように定義される。

1. まず、パッチ $\mathcal{U} = \{U_i\}$ を決める。
2. それぞれのパッチでの関数の組 $\{f_i\}$ を 0 co-chain と呼ぶ。0 co-chain の集合は群をなし、 $C^0(\mathcal{U})$ と書く。関数としてどのようなものをとるかは場合によって異なる。たとえば twistor で用いられるのは n 次の斉次正則関数であるが、その場合は $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n))$ と書く。
3. $U_i \cap U_j$ で定義された関数の組 $\{f_{ij}\}$ で、 $f_{ij} = -f_{ji}$ を満足するものを 1 co-chain と呼ぶ。その集合を $C^1(\mathcal{U})$ と書く。
4. 同様に、 $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$ で定義された関数の組 $\{f_{i_0 \dots i_p}\}$ で、添え字について完全反対称なものを p co-chain と呼ぶ。その集合を $C^p(\mathcal{U})$ と書く。
5. $\rho_i f$ という記号を、ある近傍 U で定義された関数 f の $U_i \cap U$ への制限という意味で定義する。 $C^0(\mathcal{U})$ から $C^1(\mathcal{U})$ への写像 δ を次のように定義する。

$$f_{ij} = \rho_i f_j - \rho_j f_i \quad (50)$$

これは明らかに群の準同型である。

6. さらに一般に、 $C^{p-1}(\mathcal{U})$ から $C^p(\mathcal{U})$ への写像として δ を次のように定義できる。

$$f_{i\dots jk} = (p+1)\rho_{[k}f_{i\dots j]}. \quad (51)$$

7. この δ という演算を用いて、co-cycle、co-boundary を定義することができる。また、 δ を用いて定義された co-homology を Čech co-homology とよび $\check{H}^p(\mathcal{U})$ と書く。

8. cover \mathcal{U} が「十分細かければ」、 $\check{H}^p(\mathcal{U})$ は \mathcal{U} の取り方に依存しない。その cohomology を $\check{H}^p(X)$ と書く。

例として P^1 上の Čech cohomology を計算してみよう。斉次座標を z_1, z_2 とし、 $z_i \neq 0$ で定義されるパッチを U_i とする。 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ である。 U_i 上の斉次関数 f_i は次のように展開することができる。

$$f_1(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^{n-k} z_2^k, \quad f_2(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z_1^k z_2^{n-k}. \quad (52)$$

co-chain $\{f_1, f_2\} \in C^0(\mathcal{U})$ が co-cycle であるためには、 $U_1 \cap U_2$ 上で $f_{12} = f_1 - f_2 = 0$ でなければならない。(52) の係数を比較すると、 $n \leq -1$ である場合には同類項が存在しないので $a_k = b_k = 0$ でなければならない。これは $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = 0$ であることを意味する。一方 $n \geq 0$ の場合には、 z_1 についても z_2 についても次数が非負となる次の項が生き残る。

$$f_1(z_1, z_2) = f_2(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^{n-k} z_2^k. \quad (53)$$

これは $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n))$ が (a_0, \dots, a_n) を座標とする C^{n+1} であることを意味している。

同様に \check{H}^1 も計算してみよう。 $U_1 \wedge U_2$ で正則な関数 $f_{12}(z_1, z_2)$ は次のように展開することができる。

$$f_{12}(z_1, z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z_1^{n-k} z_2^k. \quad (54)$$

パッチは二つしかないので 2 co-chain は存在せず、従ってこれは 1 co-cycle である。このうち、(52) に与えられた f_1 や f_2 を加えることで打ち消せるものは co-homology としては 0 であることに注意すると、 $n \geq -1$ の場合には全ての項が打ち消されてしまうことがわかる。従ってこの場合 $\check{H}^1 = 0$ である。一方 $n \leq -2$ の場合には

$$f_{12}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{|n|-1} a_{-k} z_1^{n+k} z_2^{-k}. \quad (55)$$

の部分は z_1 についても z_2 についても負べきであるから f_1 でも f_2 でも打ち消すことはできない。従って \check{H}^1 は (a_{n+1}, \dots, a_{-1}) によって張られる C^{-1-n} である。まとめると、次の表のようになる。

n	\dots	-4	-3	-2	-1	0	1	2	\dots
$\check{H}^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(n))$	0	0	0	0	\mathbf{C}	\mathbf{C}^2	\mathbf{C}^3	\dots	\dots
$\check{H}^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(n))$	\mathbf{C}^3	\mathbf{C}^2	\mathbf{C}	0	0	0	0	\dots	\dots

複素多様体上の Čech cohomology に対して、次の事実が知られている。

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}(n)) = H_{\bar{\partial}}^1(X, \mathcal{O}(n)) \quad (57)$$

1.6 スピノル場 ($h = +1/2$)

ヘリシティーが正の場合でも、類似した方法で運動方程式の解が構成できる。まずは $h = +1/2$ の場合を考えよう。twistor space 上の $\check{H}^1(\mathbf{T}, \mathcal{O}(-1))$ の元を $\varphi(\lambda, \mu)$ としよう。これを \mathbf{D}_x に制限したものを $g(\lambda, x)$ とする。

$$g(\lambda, x) = \rho_x \varphi(z) = \varphi(\lambda, x\lambda). \quad (58)$$

$H^1(\mathbf{D}_x, \mathcal{O}(-1)) = 0$ であるから、次のように分解できる。

$$g(\lambda, x) = g_1(\lambda, x) - g_2(\lambda, x) \quad (59)$$

ただし、 g_1 は U_1 上 ($\lambda^1 \neq 0$) で正則、 g_2 は U_2 ($\lambda^2 \neq 0$) 上で正則な関数である。具体的にはこの分解は次のように与えることができる。

$$g_1(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\langle \lambda', d\lambda' \rangle}{\langle \lambda, \lambda' \rangle} g(x, \lambda'), \quad g_2(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\langle \lambda', d\lambda' \rangle}{\langle \lambda, \lambda' \rangle} g(x, \lambda') \quad (60)$$

ただし、 C_1 および C_2 はそれぞれのパッチの“無限遠方”を回る経路。実際に差を取ると

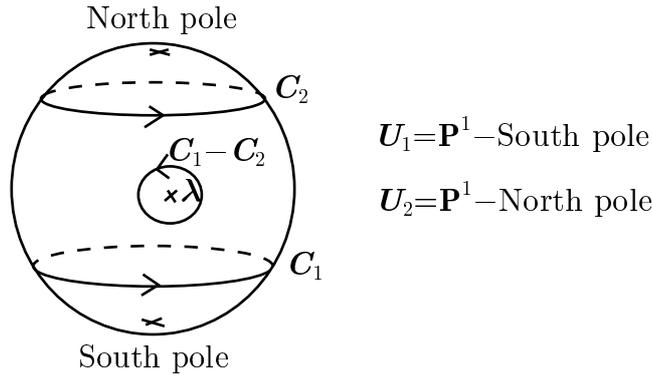


図 1: 積分路 C_1 、 C_2 、 $C_1 - C_2$

λ を回る積分路 $C_1 - C_2$ になるので、留数定理により $g(\lambda, x)$ が得られる。

g の定義 (58) と chain rule を用いれば次の式が成り立つことがわかる。

$$\lambda^a \partial_{a\dot{a}} g(x, \lambda) = \lambda^a \lambda_{a\rho x} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \varphi(z) = 0. \quad (61)$$

従って $\lambda^a \partial_{a\dot{a}} g_1(x, \lambda) = \lambda^a \partial_{a\dot{a}} g_2(x, \lambda)$ が成り立つが、 g_1 と g_2 はそれぞれのパッチ上で正則であることから、両辺共に \mathbf{D}_x 上全てで正則な 0 次の λ の斉次関数であるが、そのような関数は定数しかない。従ってこれは λ に依存しない x の関数である。そこで次のように関数 $\psi_{\dot{a}}$ を定義する。

$$\psi_{\dot{a}}(x) = \lambda^a \partial_{a\dot{a}} g_1(x, \lambda). \quad (62)$$

実はこれは Dirac 方程式を満足する。

$\psi_{\dot{a}}$ の定義 (62) に (60) を代入すれば、 $\psi_{\dot{a}}$ を次のような積分形で与えることができる。

$$\begin{aligned}
\psi_{\dot{a}}(x) &= \lambda^a \partial_{a\dot{a}} g_1(\lambda, x) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\langle \lambda', d\lambda' \rangle}{\langle \lambda, \lambda' \rangle} \lambda^a \partial_{a\dot{a}} g(x, \lambda') \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\langle \lambda', d\lambda' \rangle}{\langle \lambda, \lambda' \rangle} \langle \lambda, \lambda' \rangle \rho_x \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} f(\lambda', \mu) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \langle \lambda', d\lambda' \rangle \rho_x \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} f(\lambda', \mu)
\end{aligned} \tag{63}$$

最後の表式では $\lambda' = \lambda$ での pole が相殺されるため積分路は C_1 でも C_2 でも同じ結果を与える。

この式を微分してみよう。

$$\partial_{b\dot{b}} \psi_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda_b \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} f(z) \langle \lambda, d\lambda \rangle \tag{64}$$

\dot{a} と \dot{b} で縮約すると右辺は明らかに 0 であり、Dirac 方程式 $\partial_{a\dot{a}} \psi^{\dot{a}} = 0$ が成り立つ。

さらに一般のヘリシティ $h \geq 1/2$ に対して、線形化された運動方程式 (23) の解は次数が (42) で与えられる斉次関数 $\varphi(z)$ を用いて次のように与えられる。

$$\psi_{\dot{a}\dots\dot{b}\dot{c}}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \rho_x \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \dots \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{c}}} \varphi(z) \langle \lambda, d\lambda \rangle \tag{65}$$

1.7 反自己双対ゲージ場 ($h = +1$)

ここでは、場の強さが $F_{ab} = 0$ を満足する、すなわち反自己双対であるような $GL(N)$ ゲージポテンシャル $A_{a\dot{a}}$ を構成する。 $F_{ab} = 0$ という条件は A に対する非線形な方程式であるが、ツイスターを用いることでうまく解くことができる。この節の内容は [28] の 8 章に詳しく書かれているので、興味のある方はそちらを参照してください。

次の二つのものの間に 1 対 1 対応があることが知られている。

- anti-self dual な $GL(N)$ ゲージ場 $A(x)$
- それぞれの D_x 上で trivial な PT' 上の N 次元 holomorphic vector bundle E

実際、これらのうちどちらか片方が与えられればもう片方をそれから構成することができる。

ツイスター空間上の点 (λ, μ) に対応する α -plane 上の接ベクトルは $v^{a\dot{a}} = \lambda^a \eta^{\dot{a}}$ と書くことができる。従って、二つの接ベクトルから構成できる反対称テンソルは、スピノル添え字で表せば $\lambda_a \lambda_b \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ に対応する。すなわち、自己双対面である。ゲージ場が反自己双対であるということは、任意の α -plane の上でゲージ場が可積分 (純粋ゲージ) になることを意味している。

まず、反自己双対なゲージ場が与えられたときに、ツイスター空間上の正則ベクトル束を与える方法を説明する。ツイスター空間上の一点 z が与えられると、それに対応する

α -plane が決まる。これは自己双対な面であるので、その上のゲージ場は純粋ゲージである。これは、 ψ に対する次の線型方程式に N 個の独立な解が存在していることを意味する。

$$\lambda^a D_{a\dot{a}}\psi = 0. \quad (66)$$

すなわち、この微分方程式の解は N 次元ベクトル空間をなす。これをツイスター空間上の点 z におけるベクトル束のファイバーとみなす。この対応により、反自己双対ゲージ場が与えられると、ツイスター空間上のベクトル束が定まる。

ツイスター空間上の直線 P^1 は時空の一点に対応しているので、このベクトル束を P^1 に制限したものは自明なベクトル束を与える。これは以下のように示される。まず、時空の点を x とし、それに対応する P^1 を D_x とする。 D_x 上の任意の点は x を通る α -plane に対応するが、点 x で ψ を与えると、それを α -plane 上に一意的に拡張できるから、これにより D_x 上のベクトル束の N 個の独立な断面を決めることができる。これはこのベクトル束が自明であることを意味している。

さらに、さらに次のようにして、ツイスター空間の二つのパッチの間の遷移行列を決定することもできる。まず二つのパッチを (39) によって定義しよう。まず、 V_1 、すなわち $\lambda^1 \neq 0$ のパッチ上のベクトル束の基底を次のように与えることができる。ツイスター空間上で $(\lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2) = (0, 1, 0, 0)$ という点を p 、これに対応する α -plane $x_{\dot{a}2} = 0$ を \tilde{p} とする。また V_1 上の任意の点 z に対応する α -plane \tilde{z} は $x_{\dot{a}a}\lambda^a + \mu_{\dot{a}} = 0$ によって与えられる。 \tilde{p} と \tilde{z} は $(x_{\dot{a}1}, x_{\dot{a}2}) = (-\mu_{\dot{a}}/\lambda^1, 0)$ にて交わる。この点を p_z とする。 \tilde{p} 上の断面を一つ決めれば、この交点で断面が一致するように任意の α -plane 上の断面を決めることができる。具体的には、 \tilde{p} 上の一点を選び、 p_0 と置く。 p_0 におけるベクトル空間の完全系を v_i ($i = 1, \dots, N$) とする。 \tilde{z} 上の点 x でのベクトルの完全系は、 v_i を平行移動することで次のように定義することができる。

$$v_i(x) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{x \leftarrow p_z \leftarrow p_0} A \right) v_i \quad (67)$$

まったく同様に V_2 上のベクトル束の基底を与えるには、ツイスター空間上の点 $(\lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2) = (1, 0, 0, 0)$ を q 、それに対応する α -plane を \tilde{q} として次のように取ることができる。

$$w_i(x) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{x \leftarrow q_z \leftarrow q_0} A \right) w_i \quad (68)$$

遷移行列を

$$w_i(x) = M_{ij}(x)v_j(x) \quad (69)$$

によって定義し、上の式を代入すれば、

$$\mathcal{P} \exp \left(\int_{p_0 \leftarrow p_z \leftarrow x \leftarrow q_z \leftarrow q_0} A \right) w_i = M_{ij}(x)v_j \quad (70)$$

このようにして与えられる $M_{ij}(x)$ は \tilde{z} を決めれば、 x がその上のどの点であるかには依存しない。従って z の関数として M_{ij} を与えることができる。

ツイスター空間上のベクトル束の情報からゲージ場を構成する方法は以下の通りである。 V_{12} 上の holomorphic transition matrix $U(\lambda, \mu) \in \text{GL}(N)$ によって vector bundle E が与

えられたとしよう。\$D_x\$ 上でベクトル束が自明であるということから、\$D_x\$ 上の正則な断面は \$\mathbb{C}^N\$ を張る。これを \$x\$ 上のベクトル空間とみなすことにより、時空中のベクトル束を定義することができる。しかもこのベクトル束は \$\alpha\$-plane 上で自明である。\$\alpha\$-plane 上の二つの点 \$x\$ と \$y\$ の間の平行移動は、\$D_x\$ と \$D_y\$ (\$x\$ と \$y\$ が同一の \$\alpha\$-plane 上にあれば一点で交わる。) 上の断面をその交点で等しくおくことで定義することができる。

もう少し具体的に考えてみよう。\$W(\lambda, x)\$ を \$U(z)\$ の \$D_x\$ 上への制限として定義しよう。

$$W(\lambda, x) = U(\lambda, x\lambda). \quad (71)$$

\$U\$ が degree 0 であるから \$W\$ も \$\lambda\$ の degree 0 の関数である。\$W\$ は chain rule より次の式を満足する。

$$\lambda^a \partial_{a\dot{a}} W = 0. \quad (72)$$

さらに、\$D_x\$ 上での triviality は \$U_{12}\$ 上で \$W = W_1 W_2^{-1}\$ と分解できることを保障する。これを (72) に代入すれば \$W_1^{-1}(\lambda^a \partial_{a\dot{a}})W_1 = W_2^{-1}(\lambda^a \partial_{a\dot{a}})W_2\$ が得られるが、この左辺は \$\lambda^2 = 0\$ で regular、右辺は \$\lambda^1 = 0\$ で regular なので、両辺共にいたるところ regular な 1 次の斉次関数である。そのような関数は次のように \$\lambda\$ に依存しない \$A_{a\dot{a}}(x)\$ を用いて

$$W_1^{-1}(\lambda^a \partial_{a\dot{a}})W_1 = \lambda^a A_{a\dot{a}}(\lambda, x). \quad (73)$$

のように書くことができる。実はこのように定義された \$A\$ が求めたかったゲージ場である。共変微分を

$$\lambda^a D_{a\dot{a}} = \lambda^a \partial_{a\dot{a}} + \lambda^a A_{a\dot{a}}(x) \quad (74)$$

によって定義し、(73) の定義を代入すれば

$$\lambda^a \lambda^b F_{ab} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = [\lambda^a D_{a\dot{a}}, \lambda^b D_{b\dot{b}}] = 0 \quad (75)$$

を示すことができ、これは \$F_{ab} = 0\$ であること、すなわち \$A\$ によってできる場の強さが anti-selfdual であることを意味している。

vector bundle \$E\$ は、たとえば以下のような方法で構成することが出来る。まず、3 つの vector bundle \$F\$、\$G\$、\$H\$ と、\$F\$ から \$G\$ への injective linear map \$A\$ および \$G\$ から \$H\$ への surjective linear map \$B\$ を定義する。

$$F \xrightarrow{A} G \xrightarrow{B} H \quad (76)$$

さらに \$BA = 0\$ であれば、次のようにして新たな vector bundle \$E\$ を定義することができる。

$$E = \text{Ker} B / \text{Im} A \quad (77)$$

\$F = \oplus_k \mathcal{O}(-1)\$、\$H = \oplus_k \mathcal{O}(+1)\$ とし、\$G\$ がランク \$2k + N\$ の trivial bundle であるとしよう。この場合 \$A\$ は \$k \times (2k + N)\$ の行列、\$B\$ は \$(2k + N) \times k\$ の行列として表すことができ、それらの行列のそれぞれの成分は \$z\$ の一次斉次式である。すなわち \$A_a z^a\$、\$B_a z^a\$ のように表すことができる。\$\dim \text{Im} A = k\$、\$\dim \text{Ker} B = k + N\$ であるから、\$E\$ は \$N\$ 次元の vector bundle である。このようにして作った \$E\$ を用いて ADS なゲージ場を構成する方法は ADHM 構成法 [27] として知られている。(詳しくは [28] などを参照してください。)

1.8 公式いくつか

運動量空間上の積分と、(25) で与えられるスピノル変数を用いた積分の関係についての公式を幾つか与えておこう。積分測度に対して次の関係式が成り立つ。

$$d^4p\delta(p^2) = \frac{d^3\mathbf{p}}{E} = \langle\lambda, d\lambda\rangle d^2\tilde{\lambda} \quad (78)$$

最初の表式は 4 次元積分であるが、そのうちの質量殻から外れる向きへの積分を実行したあとに残る 3 次元積分がのこり二つのように表される。

(78) において、最初の表式と最後の表式が等しいことは以下のように示される。まず、スケール変換 (29) の自由度を $\lambda^1 = c$ と置くことで固定しよう。 c は定数である。さらに、 p とスピノル変数の関係を off-shell にまで拡張するために、次のように置く。

$$p^{1\dot{a}} = c\tilde{\lambda}^{\dot{a}}, \quad p^{2\dot{a}} = \lambda^2\tilde{\lambda}^{\dot{a}} + \epsilon\kappa^{\dot{a}}. \quad (79)$$

ただし、 $\tilde{\kappa}^{\dot{a}}$ は $[\tilde{\lambda}, \kappa] \neq 0$ を満たす任意のスピノルであり、 ϵ は mass-shell からのずれを表すパラメータである。この関係式によって p_μ の 4 つの成分を $(\epsilon, \lambda^2, \tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2)$ で表すことができる。この変数変換により、積分の測度や $\delta(p^2)$ は次のように書き換えることができる。

$$d^4p = c^2[\tilde{\lambda}, \kappa] d\epsilon d\lambda^2 d^2\tilde{\lambda}, \quad \delta(p^2) = \frac{\delta(\epsilon)}{c[\tilde{\lambda}, \kappa]} \quad (80)$$

これらを掛けあわせて ϵ 積分を実行し、スケール変換の固定の仕方に依存しないローレンツ不変な形に書き換えると (78) にある関係式が得られる。同様に、(79) の分解を行うことによって、次の公式を導くことができる。

$$\delta^2(\xi_a p^{a\dot{a}}) = \delta(p^2)\delta(\langle\xi, \lambda\rangle)(\lambda/\xi) \quad (81)$$

ξ は 0 でない任意のスピノルである。この式中の (λ/ξ) という因子は二つのスピノルの比を表す。これは $\delta(\langle\xi, \lambda\rangle)$ という因子が λ と ξ が比例していることを表しているので well-defined である。

積分測度 (78) に対応した δ 関数は次のように与えることができる。

$$E_1\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = \delta(\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle)(\lambda_2/\lambda_1)\delta^2(\tilde{\lambda}_1^{\dot{a}} - (\lambda_2/\lambda_1)\tilde{\lambda}_2^{\dot{a}}) \quad (82)$$

ただし、 $p_i^{a\dot{a}} = \lambda_i^a\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ ($i = 1, 2$) である。

この式のように、 $\delta(\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle)$ という因子はしばしば現れる。その積分を行う際には次の公式を用いる。

$$\int\langle\lambda, d\lambda\rangle\delta(\langle\lambda, \lambda'\rangle)f(\lambda) = f(\lambda') \quad (83)$$

ただし積分が well-defined であるためには $f(\lambda)$ は λ の -1 次の斉次式でなければならない。

1.9 運動量空間とツイスター空間との関係

twistor 空間上の波動関数 $\varphi(z)$ と運動量空間上の波動関数 $\psi(p)$ はそれぞれ $\psi(x)$ と次の関係にある。($h \leq 0$ の場合。)

- $\psi^{ab\dots c}(x)$ を $\lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c \delta^2(\lambda x + \mu)$ の重ねあわせとして表したときの重み関数が $\varphi(z)$ 。
- $\psi^{ab\dots c}(x)$ を e^{ipx} の重ねあわせとして表したときの重み関数が $\psi^{ab\dots c}(p)$ 。

運動量空間の波動関数 $\psi^{ab\dots c}(p)$ はスピノル変数 λ と $\tilde{\lambda}$ を用いれば、

$$\psi^{ab\dots c}(p) = \lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c \delta(p^2) \phi(\lambda, \tilde{\lambda}) \quad (84)$$

のように書くこともできる。運動量空間上での積分が定義できるためには次の関係式が満足されなければならない。

$$(\deg_\lambda - \deg_{\tilde{\lambda}})[\phi(\lambda, \tilde{\lambda})] = 2h \quad (85)$$

通常散乱振幅を考える場合、外線を運動量の固有状態 (平面波) に取るのが普通であるから、後に散乱振幅を twistor 空間で議論するためには $\varphi(z)$ と $\psi^{ab\dots c}(p)$ (あるいは $\phi(\lambda, \tilde{\lambda})$) の関係が必要である。

ヘリシティが負の場合の平面波の偏極部分 (27) は、(44) に含まれる λ の積と同じものである。このことを踏まえてヘリシティが正の場合の偏極部分 (26) と (65) を比較すると、次の対応があることがわかる。

$$\tilde{\lambda}_{\dot{a}} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \quad (86)$$

この式は、変数 $\tilde{\lambda}$ と μ が互いにフーリエ変換の関係にあることを示唆している。さらにスケール変換 (29) と (38) を比べてみても (86) のような関係が示唆される。波動関数の次数についても同様である。一般に、関数 $f(x)$ とそのフーリエ変換 $\tilde{f}(p)$ の間には次の関係が成り立つ。

$$\deg_x[f] + \deg_p[\tilde{f}] = -1 \quad (87)$$

この式によって (85) と (42) は関係している。

このことを確かめるために、 $\varphi(z)$ の定義で用いられる δ 関数をフーリエ変換して運動量空間上の関数として表してみよう。

$$\delta(p'^2) F(p'; \lambda, \mu) = \int d^4x e^{ip'x} \delta^2(\lambda_a x^{a\dot{a}} + \mu^{\dot{a}}) \quad (88)$$

ここで、運動量に p ではなく p' を用いたのは、あとでその分解として定義するスピノル変数を、この式中の λ と区別するために $(\lambda', \tilde{\lambda}')$ と表したいからである。massless 粒子であり、 $\delta(p'^2)$ という因子が現れることはわかっているので、それを除いた部分を $F(p'; \lambda, \mu)$ と置いた。 x 積分を実行するために、次のように分解する。

$$x^{a\dot{a}} = \lambda^a y^{\dot{a}} + \zeta^a z^{\dot{a}}, \quad d^4x = \langle \lambda, \zeta \rangle^2 d^2y d^2z. \quad (89)$$

ζ^a は λ^a と線形独立なスピノルである。これを代入すると、

$$\begin{aligned}
\delta(p'^2)F(p'; \lambda, \mu) &= \int d^2y d^2z \langle \lambda, \zeta \rangle^2 \exp(i\lambda_a p'^{a\dot{a}} y_{\dot{a}} + i\zeta_a p'^{a\dot{a}} z_{\dot{a}}) \delta^2(\langle \lambda, \zeta \rangle z^{\dot{a}} - \mu^{\dot{a}}) \\
&= \int d^2y \exp\left(i\lambda_a p'^{a\dot{a}} y_{\dot{a}} + i\frac{\zeta_a p'^{a\dot{a}} \mu_{\dot{a}}}{\langle \lambda, \zeta \rangle}\right) \\
&= \delta^2(\lambda_a p'^{a\dot{a}}) \exp\left(i\frac{\zeta_a p'^{a\dot{a}} \mu_{\dot{a}}}{\langle \lambda, \zeta \rangle}\right) \\
&= \delta(p'^2) \delta(\langle \lambda, \lambda' \rangle) (\lambda'/\lambda) e^{i(\lambda'/\lambda)[\tilde{\lambda}', \mu]}. \tag{90}
\end{aligned}$$

最後の变形に (81) を用いた。 λ' と $\tilde{\lambda}'$ は p' を on-shell で分解することで定義されるスピノルである。この式中の λ'/λ は二つのスピノルの比を表す。 $\delta(\langle \lambda, \lambda' \rangle)$ という因子が λ と λ' が比例することを保障しているため、この比は well-defined である。これを用いることで、 $F(p'; \lambda, \mu)$ が次のように決まる。

$$F(p'; \lambda, \mu) \equiv F(\lambda', \tilde{\lambda}'; \lambda, \mu) = \delta(\langle \lambda, \lambda' \rangle) (\lambda'/\lambda) e^{i(\lambda'/\lambda)[\tilde{\lambda}', \mu]}. \tag{91}$$

helicity h が負の場合には、運動量空間上の波動関数は twistor 空間上の波動関数を用いて次のように表される。

$$\psi^{ab\dots c}(p') = \int \Omega F(\lambda', \tilde{\lambda}'; \lambda, \mu) \lambda^a \lambda^b \dots \lambda^c \varphi(\lambda, \mu) \tag{92}$$

運動量空間の波動関数の偏極部分を除いた軌道運動の波動関数 $\phi(\lambda', \tilde{\lambda}')$ を (84) によって定義すれば、 $\phi(\lambda', \tilde{\lambda}')$ は次の式によって与えられる。

$$\phi(\lambda', \tilde{\lambda}') = \int \Omega F(\lambda', \tilde{\lambda}'; \lambda, \mu) (\lambda'/\lambda)^{2h} \varphi(\lambda, \mu) = \int d^2\mu e^{i[\tilde{\lambda}', \mu]} \varphi(\lambda', \mu). \tag{93}$$

すなわち、 $\phi(\lambda, \tilde{\lambda})$ と $\varphi(\lambda, \mu)$ は $\tilde{\lambda}$ と μ のフーリエ変換によって関係している。この関係式は、ヘリシティが正の場合にも同様に成り立つことを示すことができる。

関数 $F(p; \lambda, \mu)$ は次の性質を満足する。(ただしここではスピノル変数を全て実数だととして計算した。)

$$\int \Omega F(\lambda' \tilde{\lambda}'; \lambda, \mu) F^*(\lambda'' \tilde{\lambda}''; \lambda, \mu) = \delta(\langle \lambda', \lambda'' \rangle) (\lambda''/\lambda') \delta^2(\tilde{\lambda}'^{\dot{a}} - (\lambda''/\lambda') \tilde{\lambda}''^{\dot{a}}) \tag{94}$$

この右辺は (82) にある不変 δ 関数である。従って、(93) の逆変換は次のように与えることができる。

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int \langle \lambda', d\lambda' \rangle d^2\tilde{\lambda}' F^*(\lambda', \tilde{\lambda}'; \lambda, \mu) (\lambda'/\lambda)^{-2h} \phi(\lambda', \tilde{\lambda}') \tag{95}$$

この変換公式中に現れる積分核は平面波を表す twistor 空間上の波動関数と解釈することができる。すなわち、運動量が $p_i^{a\dot{a}} = \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ で与えられる平面波の波動関数 $\varphi_i(z)$ は次のように与えられる。(i は後に散乱振幅の議論をするときには外線を区別するための添え字である。ここでは特に意味は無い。)

$$\varphi_i(\lambda, \mu) = F^*(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i; \lambda, \mu) (\lambda_i/\lambda)^{-2h_i} = (\lambda_i/\lambda)^{1-2h_i} \delta(\langle \lambda, \lambda_i \rangle) \exp(i(\lambda_i/\lambda)[\mu, \tilde{\lambda}_i]) \tag{96}$$

1.10 共形代数

twistor 空間を導入する一つの利点として、conformal 対称性が見やすくなるということがある。そこでまず spinor 変数を用いて conformal 代数の generator を与え、それをフーリエ変換することで twistor 空間に作用する conformal 変換の生成子を構成しよう。まず、回転演算子は、 λ^a と $\tilde{\lambda}^{\dot{a}}$ のそれぞれをスピノルとして変換すればよいので、次のように与えられる。

$$J_{ab} = \frac{i}{2} \left(\lambda_a \frac{\partial}{\partial \lambda^b} + \lambda_b \frac{\partial}{\partial \lambda^a} \right), \quad J_{\dot{a}\dot{b}} = \frac{i}{2} \left(\tilde{\lambda}_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{b}}} + \tilde{\lambda}_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \right) \quad (97)$$

平行移動は p そのものであるから

$$p_{ab} = \lambda_a \tilde{\lambda}_b \quad (98)$$

この式から、 λ と $\tilde{\lambda}$ の mass dimension がどちらも $1/2$ ととっておくのがよい。conformal boost については、mass dimension は P の逆の -1 であるから、次のように取るしかない。

$$K_{ab} = \frac{\partial}{\partial \lambda^a} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^b} \quad (99)$$

最後に、dilatation 演算子 D は λ と $\tilde{\lambda}$ の mass dimension が $1/2$ であることから次のようにとればよい。

$$D = \frac{i}{2} \left(\lambda^a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} + \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} + 2 \right) \quad (100)$$

定数項は、 K と P の交換関係から求めることができる。

これらの演算子を amplitude に作用させても全て (120) の性質を保つことに注意しよう。すなわち、上記の生成子を \mathcal{O} とすれば、次の式が成り立つ。

$$\deg_{\lambda}[\mathcal{O}] - \deg_{\tilde{\lambda}}[\mathcal{O}] = 0 \quad (101)$$

コンフォーマル変換の生成子をフーリエ変換を用いて twistor 変数で書き換えるには次の置き換えを行う。

$$\tilde{\lambda} = i \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} = i \mu_{\dot{a}}. \quad (102)$$

この式からもわかるように、 $\deg_{\tilde{\lambda}}[\mathcal{O}] = -\deg_{\mu}[\mathcal{O}]$ が成り立つ。従って、(101) が次のように書き換えられる。

$$\deg_{\lambda}[\mathcal{O}] + \deg_{\mu}[\mathcal{O}] = 0 \quad (103)$$

これは、 \mathcal{O} が関数に作用したときに (λ, μ) の次数を保つことを意味している。具体的には、生成子は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} J_{ab} &= \frac{i}{2} \left(\lambda_a \frac{\partial}{\partial \lambda^b} + \lambda_b \frac{\partial}{\partial \lambda^a} \right), & J_{\dot{a}\dot{b}} &= -\frac{i}{2} \left(\mu_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{b}}} + \mu_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \right), \\ p_{a\dot{a}} &= i \lambda_a \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}}, & K_{a\dot{a}} &= i \mu_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \lambda^a}, & D &= \frac{i}{2} \left(\lambda^a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} - \mu^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}} \right). \end{aligned} \quad (104)$$

これらは 4 次元空間 (λ, μ) の線型変換を生成し、 $SL(4)$ の代数をなすことがわかる。

このように、twistor 空間上では conformal 対称性が見やすくなるが、その代わりにパリティ変換は顕に見えなくなる。

1.11 超対称化

twistor 空間は超対称性を持たない理論に対してもともと提案されたものであるが、超対称 Yang-Mills 理論を扱えるように一般化して super twistor space を導入するのは簡単である。ここでは特に $\mathcal{N} = 4$ の理論を扱う方法について簡単に説明する。 $\mathcal{N} = 4$ 理論にはヘリシティが $+1$ から -1 までのものが全て現れ、それぞれ R-対称性 $SU(4)_R$ の異なる表現に属している。超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta F_{ab} &= \bar{\xi}_{I\dot{c}} D^{\dot{c}a} \chi^{Ib}, \\
\delta \chi^{Ia} &= F^{ab} \xi_b^I + \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} D^{ab} \phi_{JK} \bar{\xi}_{L\dot{b}}, \\
\delta \phi_{IJ} &= \epsilon_{IJKL} \xi_a^K \chi^{aL} + \bar{\xi}_{[I\dot{a}} \bar{\chi}_{J]}^{\dot{a}}, \\
\delta \bar{\chi}_{I\dot{a}} &= F_{\dot{a}b} \bar{\xi}_I^{\dot{b}} + D_{\dot{a}b} \phi_{IJ} \xi^{Jb}, \\
\delta F_{\dot{a}b} &= \xi^{Ic} D_{c\dot{a}} \bar{\chi}_{I\dot{b}}.
\end{aligned} \tag{105}$$

I, J, \dots は R-対称性の添え字である。 $(F^{ab}, \chi^{Ia}, \phi^{IJ}, \bar{\chi}_{I\dot{a}}, F^{\dot{a}b})$ から偏極部分を分離して次のように on-shell の波動関数 $(G, \chi^I, \phi^{IJ}, \bar{\chi}_I, A)$ を定義しよう。

$$F^{ab} = \lambda^a \lambda^b G, \quad \chi^{Ia} = \lambda^a \chi^I, \quad \phi^{IJ} = \phi^{IJ}, \quad \bar{\chi}_{I\dot{a}} = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \bar{\chi}_I, \quad F^{\dot{a}b} = \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{b}} A \tag{106}$$

同じ文字を用いているものもあるが、混同しないこと。ここで定義された on-shell 波動関数はすべて λ と $\tilde{\lambda}$ の関数である。新たに定義された波動関数に対する超対称変換は

$$\begin{aligned}
\delta G &= \bar{\xi}_{I\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \chi^I, \\
\delta \chi^I &= \xi^{Ia} \lambda_a G + \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} \bar{\xi}_{K\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \phi_{IJ}, \\
\delta \phi_{IJ} &= \epsilon_{IJKL} \xi_a^K \lambda^a \chi^L + \bar{\xi}_{[I\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \bar{\chi}_{J]}, \\
\delta \bar{\chi}_I &= \bar{\xi}_I^{\dot{a}} \tilde{\lambda}_{\dot{a}} A + \xi^{Ja} \lambda_a \phi_{IJ}, \\
\delta A &= \xi^{Ia} \lambda_a \bar{\chi}_I.
\end{aligned} \tag{107}$$

となる。これらをまとめて表すために超場を用いよう。R-対称性のもとで 4 表現として振舞うグラスマン変数 ψ^I を用いて次のように超場を組む。

$$\varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \psi) = A + \psi^I \bar{\chi}_I + \psi^I \psi^J \phi_{IJ} + \epsilon_{IJKL} \psi^I \psi^J \psi^K \chi^L + \epsilon_{IJKL} \psi^I \psi^J \psi^K \psi^L G. \tag{108}$$

すると、超対称変換を次のように書くことができる。

$$\delta \varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \psi) = \left(\xi^{Ia} \lambda_a \frac{\partial}{\partial \psi^I} + \bar{\xi}_{I\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \psi^I \right) \varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \psi). \tag{109}$$

ψ^I とは双対な R-対称性の表現に属するグラスマン変数 η_I を用いると、(108) とは逆に、 G を最低次、 A を最高次の成分場として組むこともできる。

$$\varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \eta) = G + \eta_I \chi^I + \epsilon^{IJKL} \eta_I \eta_J \phi_{KL} + \epsilon^{IJKL} \eta_I \eta_J \eta_K \bar{\chi}_L + \epsilon^{IJKL} \eta_I \eta_J \eta_K \eta_L A. \tag{110}$$

$\varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \psi)$ と $\varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \eta)$ は次のフーリエ変換で関係している。

$$\varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \psi) = \int d^4\eta e^{i\psi^I \eta_I} \varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \eta). \quad (111)$$

実際、次数について次の関係式が成り立つので、フーリエ変換はグラスマン座標のある、なしを入れ替える。

$$\deg_\psi[\tilde{f}(\psi)] + \deg_\eta[f(\eta)] = 1. \quad (112)$$

ボゾンの場合の式 (87) と右辺の符号が異なるのは積分 $\int d\eta$ が微分と同じで η の -1 次であることからくる。(これに対してグラスマン数の δ 関数は $\delta(\eta) = \eta$ であるから次数は 1 である。) $\varphi(z, \eta)$ に対する超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta\varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \eta) = \left(\xi^{Ia} \lambda_a \eta_I + \bar{\xi}_{I\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \eta_I} \right) \varphi(\lambda, \tilde{\lambda}, \eta). \quad (113)$$

ツイスター空間上で超場を表すためには、 $\tilde{\lambda}$ をフーリエ変換して変数 μ に移る。このとき次の式が成り立つ。

$$(\deg_\lambda + \deg_\mu + \deg_\psi)[\varphi(\lambda, \mu, \psi)] = 0, \quad (114)$$

$$(\deg_\lambda + \deg_\mu - \deg_\eta)[\varphi(\lambda, \mu, \eta)] = -4. \quad (115)$$

この式からわかるとおり、座標 ψ と μ のうち、波動関数が斉次関数として表されるのは ψ を用いた場合である。従って超ツイスター空間を (λ, μ, ψ) が張る空間として定義するのがよい。任意のヘリシティの場の波動関数はその上の 0 次の斉次式として与えられる。すなわち、スケール変換

$$\lambda \rightarrow \alpha\lambda, \quad \mu \rightarrow \alpha\mu, \quad \psi^A \rightarrow \alpha\psi^A. \quad (116)$$

のもとで波動関数は不変である。従って、super twistor space は 4 つのボゾンの座標 (λ, μ) と 4 つのフェルミオンの座標 ψ^A で張られる空間を (116) の同一視で割ったもの $\mathbb{P}^{3|4}$ である。

超対称変換の生成子をツイスター変数を用いて表せば、次のようになる。

$$Q_{Ia} = \lambda_a \frac{\partial}{\partial \psi^I}, \quad \bar{Q}_{\dot{a}}^I = \psi^I \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{a}}}. \quad (117)$$

R-対称性の生成子は

$$L_J^I = \psi^I \frac{\partial}{\partial \psi^J} - \frac{1}{4} \delta_J^I \psi^K \frac{\partial}{\partial \psi^K}. \quad (118)$$

コンフォーマル代数の生成子とこれらを全てあわせれば、超コンフォーマル代数 PSU(4|4) が得られる。

ヘリシティ h_i の平面波の波動関数 (96) を super twistor space 上の波動関数として与えるためには、次のようにすればよい。

$$\varphi_i(\lambda, \mu, \psi^A) = (\psi^A)^{2-2h_i} (\lambda_i/\lambda)^{1-2h_i} \delta(\langle \lambda, \lambda_i \rangle) \exp(i(\lambda_i/\lambda)[\mu, \tilde{\lambda}_i]) \quad (119)$$

ただし個の式の中の $(\psi^A)^{2-2h_i}$ は 4 つの ψ^A の中の $2 - 2h_i$ 個の積を表しており、それぞれの h_i に対して ${}_4C_{2-2h_i}$ 通りの組み合わせがある。もちろんそれらは vector multiplet には同じ helicity でも幾つかの粒子が存在することに対応している。

2 散乱振幅

2.1 波動関数と散乱振幅

随伴表現に属する n 個の粒子の tree レベルの散乱振幅を考えよう。外線は 1 から n までの番号によって区別されるが、その順序には color ordering を用いる。すなわち、ゲージ群の color についての因子は $\text{tr}(T_{a_1} T_{a_2} \cdots T_{a_n})$ となるように番号をつけておく。以下ではこの因子は省略する。

CPT 変換を用いれば、ヘリシティー h の入射粒子をヘリシティー $-h$ の散乱粒子とみなすこともできる。以下では外線のヘリシティーは全て入る向きあるいは出る向きにそろえて考えることにする。

外線の運動量と偏極が p_i と ϵ_i である散乱振幅を $A = A(p_i, \epsilon_i)$ としよう。スピノル変数 λ_i および $\tilde{\lambda}_i$ を用いればこの散乱振幅は $A = A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i)$ のように書くこともできる。しかも、 $A(p_i, \epsilon_i)$ は偏極 ϵ_i に線型に依存していることから、それぞれの外線 i に対する λ_i の次数と $\tilde{\lambda}_i$ の次数の間に、(28) と同様に次の関係があることがわかる。

$$\deg_{\lambda_i}[A] - \deg_{\tilde{\lambda}_i}[A] = -2h_i \quad (120)$$

Amplitude $A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i)$ はフーリエ変換を用いて twistor 空間上の関数に書き換えることができる。

$$A(\lambda_i, \mu_i) = \prod_{i=1}^n \left(\int d^2 \tilde{\lambda}_i e^{i[\mu_i, \tilde{\lambda}_i]} \right) A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) \quad (121)$$

(87) を用いれば、次数についての式 (120) は次のように書き換えられる。

$$\deg_{\lambda_i}[A] + \deg_{\mu_i}[A] = -2 - 2h_i \quad (122)$$

すなわち、それぞれの外線についての変数 (λ_i, μ_i) に対して A は斉次式であり、次数はヘリシティーを用いて $-2 - 2h_i$ と与えられる。

外線の運動量とヘリシティーを指定することで得られた amplitude を $A(z_1, z_2, \dots, z_n)$ とすれば、twistor 空間上の波動関数 $\varphi_i(z_i)$ によって与えられる一般の状態を外線に持つ散乱振幅は次のように与えられる。

$$\mathcal{M} = \prod_i \left(\int \Omega_i \varphi_i(z_i) \right) A(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (123)$$

ただし Ω_i は z_i に対して (41) によって定義されたコンフォーマル変換 $\text{SL}(4)$ のもとで不変な積分測度である。この積分が well defined であるためにはその非積分関数がスケール変換 (38) のもとで不変であることが必要であるが、 φ と A がそれぞれ次数 (42) と (122) を持つことを用いれば確かにそうなっていることを見ることができる。

超対称化する場合には、波動関数同様散乱振幅もグラスマン座標 η_A を用いてまとめると便利である。 η で展開したときにそれぞれの項を次のようにそれぞれのヘリシティーの状態を表すものと解釈する。

$$\deg_{\eta}[A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \eta_{i,A})] = 2 - 2h_i. \quad (124)$$

η_A について展開して得られる component field に対する amplitude は (120) という性質を持っていた。これを (124) と組み合わせると、次の式が得られる。

$$\deg_{\lambda_i}[A] - \deg_{\tilde{\lambda}_i}[A] - \deg_{\eta}[A] = -2 \quad (125)$$

フーリエ変換後の amplitude $A(\lambda_i, \mu_i, \psi_i^A)$ が満足する性質を書くと次のようになる。

$$\deg_{\lambda_i}[A] + \deg_{\mu_i}[A] + \deg_{\psi_i}[A] = 0 \quad (126)$$

波動関数 $\psi(\lambda, \mu, \psi)$ の次数は前と同様に全体の遷移振幅が代表元の取り方に依存しないように取らなければならないが、supert wistor space $\mathbf{P}^{3|4}$ 上の measure は (41) の代わりに

$$\Omega = \epsilon_{abcd} z^a dz^b dz^c dz^d d\psi^1 d\psi^2 d\psi^3 d\psi^4 \quad (127)$$

となり、(116) のもとで不変である。また、波動関数もスケール変換のもとで不変であるから、次の積分は well-defined である。

$$\mathcal{M} = \prod_i \left(\int \Omega_i \varphi_i(z_i, \psi_i) \right) A(z_i, \psi_i) \quad (128)$$

2.2 3 点相互作用

ここではもっとも簡単な散乱振幅として Yang-Mills 場の on-shell 外線を 3 本持つ振幅について考えてみよう。外線運動量を p_1, p_2, p_3 とする。時空の計量が $(3, 1)$ の場合には、運動量保存則より 3 つの外線運動量は比例していなければならない。これに対して $(2, 2)$ の場合にはこのような特異な状況は生じない。そこでここでは時空の計量は $(2, 2)$ であるとし、スピノル変数は全て実であるとする。

運動量保存則より次の式が成り立つ。

$$0 = \lambda_1^a \left(\sum_{i=1}^3 p_{ia\dot{a}} \right) \tilde{\lambda}_2^{\dot{a}} = \langle \lambda_1, \lambda_3 \rangle [\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2] \quad (129)$$

従って、 $\langle \lambda_1, \lambda_3 \rangle = 0$ または $[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2] = 0$ である。

前者の場合には任意の i と j に対して $\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle = 0$ が成り立つ。すなわち λ_i ($i = 1, 2, 3$) が全て同じ向きをむいている。従って、二つの運動量ベクトルが定める平面の向きを表す反対称テンソルは、次のように自己双対テンソルになる。

$$p_1^{[\mu} p_2^{\nu]} \sim \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] \lambda_1^{\{a} \lambda_2^{b\}} \quad (130)$$

このとき、運動量ベクトルの定める平面 (null-plane) を自己双対面と呼ぶ。同様に、 $[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2] = 0$ の場合には任意の i と j に対して $[\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j] = 0$ が成り立ち、運動量ベクトルは反自己双対面を定める。

このことを踏まえてゲージ場の 3 頂点を計算しよう。ラグランジアンから読み取れる 3 頂点は

$$I_3 = I_{123} + I_{231} + I_{312}, \quad I_{ijk} = \text{tr}(F_{\mu\nu}^{(i)} A_{\mu}^{(j)} A_{\nu}^{(k)}) \quad (131)$$

である。全てのヘリシティーが正の場合には

$$I_{123} = (\epsilon_{ab} \tilde{\lambda}_{1\dot{a}} \tilde{\lambda}_{1\dot{b}}) \frac{\tilde{\lambda}_2^{\dot{a}} \mu_2^a}{\langle \lambda_2, \mu_2 \rangle} \frac{\tilde{\lambda}_3^{\dot{b}} \mu_3^b}{\langle \lambda_3, \mu_3 \rangle} = \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2][\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3] \langle \mu_2, \mu_3 \rangle}{\langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \langle \lambda_3, \mu_3 \rangle} \quad (132)$$

となる。散乱振幅はゲージ不変であり、 μ_i の取り方には依存しないはずである。計算を簡単にするためには $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ と取るのがよい。すると (132) は $\langle \mu_2, \mu_3 \rangle$ という因子を含んでいるから 0 になる。一般の μ_i については (132) は 0 ではないが、3 つの項の和を取った I_3 は 0 になる。このことは、運動量保存則やフィルツ変換を用いて次の式を示すことができる。3 つの項のうちの二つを足してみると、次のように、残る一つの項の符号を変えたものが得られることがわかる。

$$\begin{aligned} I_{123} + I_{231} &= \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]([\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3] \langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \mu_2, \mu_3 \rangle - [\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3] \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \langle \mu_3, \mu_1 \rangle)}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \langle \lambda_3, \mu_3 \rangle} \\ &= \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2][\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3] (\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \mu_2, \mu_3 \rangle - \langle \lambda_1, \mu_2 \rangle \langle \mu_1, \mu_3 \rangle)}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \langle \lambda_3, \mu_3 \rangle} \\ &= \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2][\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3] \langle \lambda_1, \mu_3 \rangle \langle \mu_2, \mu_1 \rangle}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle \langle \lambda_3, \mu_3 \rangle} \\ &= -\frac{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2][\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_1] \langle \mu_1, \mu_2 \rangle}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle} = -I_{312} \end{aligned} \quad (133)$$

従って、3 つの和は 0 になる。全てのヘリシティーが負の場合も同様に 0 になる。

実は、外線の本数が 4 以上であっても、外線のヘリシティーが全て +1 あるいは全て -1 である散乱振幅は 0 になる。この証明は以下のように行うことができる。まず、理論を超対称性を持つ理論に埋め込む。tree level を考えている限り、超対称性を持つ理論に拡張したとしても gluon 以外の場は寄与しないから、amplitude は変わらないはずである。ヘリシティーが ∓ 1 の状態の消滅演算子は $F_{\mu\nu}^{\pm}$ であるので、外線が全て $h = -1$ である散乱振幅は次の相関関数を用いて表すことができる。

$$A = \langle F_{a_1 b_1}(x_1) F_{a_2 b_2}(x_2) \cdots F_{a_n b_n}(x_n) \rangle \quad (134)$$

ここで、自己双対部分を表すのにスピノル添え字を用いた。ここで、 $\mathcal{N} = 1$ の超対称性を仮定すると、次の式が成り立つ。

$$\{Q_a, \lambda_b\} = F_{ab}, \quad [Q_a, F_{bc}] = 0. \quad (135)$$

(ここでは数係数は無視した。これらの変換則は、演算子の次元と添え字の一致に気をつけるとこれ以外にはなりえないことがわかる。) この式を用いれば、

$$A = \langle \{Q_{a_1}, \lambda_{b_1}(x_1) F_{a_2 b_2}(x_2) \cdots F_{a_n b_n}(x_n)\} \rangle \quad (136)$$

と書けるので、 $Q|0\rangle = \langle 0|Q = 0$ を用いるとこの振幅が 0 であることが示される。

次に、二つの外線のヘリシティーが正、残り一つが負の場合を考えよう。ここでは $h_1 = h_2 = +1$ 、 $h_3 = -1$ とする。このとき、 I_{ijk} はそれぞれ次のように与えられる。

$$I_{123} = (\epsilon_{ab} \tilde{\lambda}_{1\dot{a}} \tilde{\lambda}_{1\dot{b}}) \frac{\tilde{\lambda}_2^{\dot{a}} \mu_2^a}{\langle \lambda_2, \mu_2 \rangle} \frac{\lambda_3^b \tilde{\mu}_3^{\dot{b}}}{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\mu}_3]} = -[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_3] \langle \lambda_3, \mu_2 \rangle}{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\mu}_3] \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle}, \quad (137)$$

$$I_{231} = (\epsilon_{ab} \tilde{\lambda}_{2\dot{a}} \tilde{\lambda}_{2\dot{b}}) \frac{\lambda_3^a \tilde{\mu}_3^{\dot{a}}}{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\mu}_3]} \frac{\tilde{\lambda}_1^b \mu_1^{\dot{b}}}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle} = -[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] \frac{[\tilde{\lambda}_2, \tilde{\mu}_3] \langle \lambda_3, \mu_1 \rangle}{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\mu}_3] \langle \lambda_1, \mu_1 \rangle}, \quad (138)$$

$$I_{312} = (\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{3a} \lambda_{3b}) \frac{\tilde{\lambda}_1^{\dot{a}} \mu_1^a}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle} \frac{\tilde{\lambda}_2^{\dot{b}} \mu_2^b}{\langle \lambda_2, \mu_2 \rangle} = [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] \frac{\langle \lambda_3, \mu_1 \rangle \langle \lambda_3, \mu_2 \rangle}{\langle \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle \lambda_2, \mu_2 \rangle} \quad (139)$$

これらはどれも $[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]$ という因子を含んでいるから、運動量が反自己双対面上にある場合には 0 になる。そこで今度も運動量が自己双対面をなす場合を考える。このとき λ_i が平行であり、それらの間の比が意味をもつので $\langle \lambda_3, \mu_1 \rangle / \langle \lambda_1, \mu_1 \rangle$ を単に λ_3 / λ_1 のように書くことにしよう。運動量保存則を用いれば、次の式が成り立つ。

$$I_{123} + I_{231} = -\frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]}{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\mu}_3]} \left([\tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_3] \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} + [\tilde{\lambda}_2, \tilde{\mu}_3] \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} \right) = [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] \frac{\lambda_3 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} = I_{312} \quad (140)$$

従って、 $I_{123} + I_{231} + I_{312} = 2I_{312}$ である。ここでさらに、運動量保存則より次の式が成り立つ。

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \frac{\lambda_3 [\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2]}{\lambda_1 [\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2]} = -\frac{\lambda_1 [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]}{\lambda_1 [\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2]} = -\frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]}{[\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2]} \quad (141)$$

この式と、1 と 2 を入れ替えて得られる同様な式を用いれば、

$$I_{123} + I_{231} + I_{312} = 2 \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]^3}{[\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3][\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_1]} \quad (142)$$

となり、0 でない振幅が得られる。

全く同様に、ヘリシティーのうち二つが負、一つが正の場合には運動量が反自己双対面上にあるときに次の振幅が得られる。

$$I(- - +) = 2 \frac{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle^3}{\langle \lambda_2, \lambda_3 \rangle \langle \lambda_3, \lambda_1 \rangle} \quad (143)$$

2.3 ツイスター空間上の局所的相互作用

以前に見たように、4次元時空上の一点 x^μ はツイスター空間上の P^1 に対応している。この空間を D_x と定義した。従って、4次元の場の理論の局所的相互作用がツイスター空間上の相互作用として書けたとしても、一般にはツイスター空間上では局所的ではなく、 D_x 上の離れた点の間の相互作用にマップされる。

前節で与えた三点相互作用のうち、ヘリシティーが $(+, +, -)$ のものについて見てみよう。この場合、散乱振幅が 0 でないのは 3 つの運動量が自己双対面に乗っているときだけ

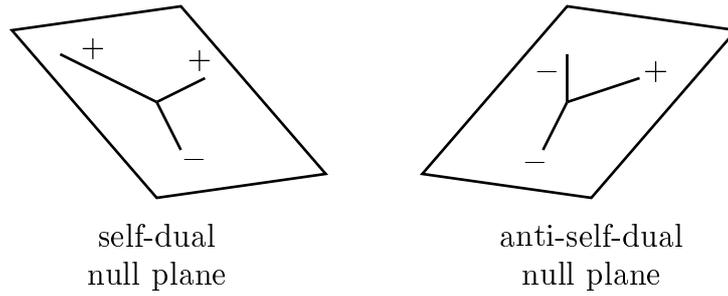


図 2: null plane 上の三点相互作用

である。これは外線運動量に対応するスピノル変数 λ がスケール変換の自由度を除いて一致することを意味しており、 D_x 平面上で同一点にあることを意味している。このことは、 $(+, +, -)$ の三点相互作用がツイスター空間上でも局所的相互作用として表されることを示唆している。従って、 $(++-)$ 型の相互作用のみを持つ理論があれば、ツイスター空間上の局所的な場の理論として表せる可能性がある。実際、 $(++-)$ 型の相互作用のみを含む $2+2$ 次元の場の理論が知られている。その理論を与える前に、通常の Yang-Mills 理論の作用を次のように書き換えよう。

$$S = \int d^4x \operatorname{tr} \left(F_{ab} G^{ab} + \frac{g^2}{2} G_{ab}^2 \right) \quad (144)$$

F_{ab} はゲージ場の強さ $F = dA + A^2$ の自己双対部分であり、 G_{ab} は独立な補助場である。 $(F_{ab}$ や G_{ab} の添え字はどちらも対称なスピノル添え字である。) 時空の計量が $++--$ であれば、これらの場は実に取りることができる。これが通常の Yang-Mills 理論を表していることは、補助場 G_{ab} を消去してみればわかる。運動方程式は $G_{ab} = g^{-2} F_{ab}$ を与え、これを作用に戻せば、次の式を得る。

$$S = \frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F^{+2}) = \frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \int d^4x [\operatorname{tr}(F^{+2} + F^{-2}) + \operatorname{tr}(F^{+2} - F^{-2})] \quad (145)$$

最後に得られた作用のうち二つ目の項は摂動論的振幅に寄与しない位相項 $F\tilde{F}$ であるから無視することが出来、通常のゲージ場の運動項のみが残る。

作用 (144) の中で、 GdA という部分を自由場部分 GAA 項および $g^2 G^2$ 項を相互作用とみなしてファインマンルールを作ると、図 3 のようになる。(ここでは細かい関数形は見ないことにし、 g 依存性のみを考える。) (144) は通常の Yang-Mills 理論と等価である

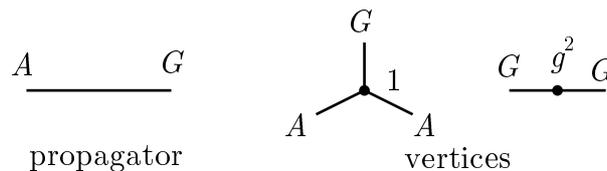


図 3: F - G 理論のファインマンルール

から、二種類の三点相互作用 $(-++)$ と $(--+)$ を再現するはずである。運動方程式よ

り $G_{ab} \sim F_{ab}$ であることから、 G_{ab} をゲージ場のヘリシティー -1 の成分と同一視する。一方、自由場部分 GdA のみに注目すれば、運動方程式より $F_{ab} = 0$ となり、 A はヘリシティー $+1$ 成分を持つことがわかる。従って、 $(-++)$ 相互作用は (144) 中の相互作用項 GAA と同一視できる。一方 $(--+)$ 相互作用は $F-G$ 理論の三点相互作用 GAA と二点相互作用 GG をプロパゲータで結ぶことによって実現できる。

ここで、結合定数に対する依存性を見ると、 $(-++)$ 相互作用は g に依存しないのに対して $(--+)$ 相互作用には g^2 という結合定数が現れる。この非対称性は $g \neq 0$ の場合にはスケール変換 $G \rightarrow g^{-1}G$ 、 $A \rightarrow gA$ によってなくすることができるので、物理的な意味は無い。しかし $g = 0$ の場合にはこのスケール変換が特異的になるために二つの相互作用の対称性はなくなり、 $(--+)$ 相互作用が存在しない理論が得られる。

$$S = \int d^4x \operatorname{tr}(F_{ab}G^{ab}) \quad (146)$$

この理論は、上で述べたように、ツイスター空間上の局所的な場の理論と対応していると考えられる。

さて、その場の理論とはどのようなものであろうか？まず、 A と G に対応するツイスター空間上の場を φ^A と φ^G としよう。ヘリシティーと次数の関係 (42) から、 φ^A は次数が 0 で φ^G は次数が -4 でなければならない。すなわちそれぞれ \mathcal{O} と $\mathcal{O}(-4)$ の断面である。ツイスター空間上の次の局所的相互作用を考えてみよう。

$$I_{\text{int}} = \int \Omega_3 \varphi^A \varphi^A \varphi^G. \quad (147)$$

積分測度まで含めた被積分関数の次数は 0 であるから、この積分は well-defined である。この相互作用に対して平面波 (96) の外線をつけたときにどのような振幅が得られるかを計算してみよう。

あとで便利なように三本の外線のヘリシティー h_i は固定せずに計算しよう。

$$I_{\text{int}} = \int \Omega_3 \varphi^{h_1} \varphi^{h_2} \varphi^{h_3}. \quad (148)$$

ただし、積分測度まで含めた被積分関数の次数が 0 でなければならないので、次の条件を満足しなければならない。

$$h_1 + h_2 + h_3 = 1. \quad (149)$$

(147) は $h_1 = h_2 = +1$ 、 $h_3 = -1$ の場合に相当する。

平面波 (96) を代入すると、次の式を得る。

$$\mathcal{M} = \int \Omega_3 \prod_{i=1}^3 [(\lambda_i/\lambda)^{1-2h_i} \delta(\langle \lambda, \lambda_i \rangle) \exp(i(\lambda_i/\lambda)[\mu, \tilde{\lambda}_i])] \quad (150)$$

$\Omega_3 = \langle \lambda, d\lambda \rangle d^2\mu$ とおき、 μ 積分を実行すると δ 関数が現れる。

$$A = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle \left(\prod_i (\lambda_i/\lambda)^{1-2h_i} \delta(\langle \lambda, \lambda_i \rangle) \right) \delta^2 \left(\sum_{i=1}^3 (\lambda_i/\lambda) \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \right) \quad (151)$$

この被積分関数は λ について 0 次である。スケール変換を $\lambda^2 = 1$ と固定すると、次の式を得る。

$$A = \int d\lambda^1 \left(\prod_{i=1}^3 (\lambda_i^2)^{1-2h_i} \delta(\lambda_i^1 - \lambda^1 \lambda_i^2) \right) \delta^2 \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \tilde{\lambda}_i^a \right) \quad (152)$$

さらに λ^1 積分を行い、 $\delta(\lambda_3^1 - \lambda^1 \lambda_3^2)$ を落とすと、積分を含まない次の amplitude を得る。

$$A = \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2} \right)^{1-2h_1} \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2} \right)^{1-2h_2} (\lambda_3^2)^2 \delta(\langle \lambda_3, \lambda_1 \rangle) \delta(\langle \lambda_3, \lambda_2 \rangle) \delta^2 \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \tilde{\lambda}_i^a \right) \quad (153)$$

はじめの二つの δ 関数は 3 つの λ_i が平行であることを意味している。従って最後の δ 関数とあわせれば $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^a = 0$ を示すことができ、運動量保存が成り立っている。従って、 δ 関数は $\delta^4(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^a)$ という形にまとめることができるはずである。

(153) の最後の δ 関数を用いて次の式が得られる。

$$\sum_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i^a \lambda_i^2 = -\tilde{\lambda}_3^a \lambda_3^2 \quad (154)$$

この式を λ_1^2 と λ_2^2 に対する連立方程式であると思って解くと、

$$\lambda_1^2 = \frac{[2, 3]}{[1, 2]} \lambda_3^2, \quad \lambda_2^2 = \frac{[3, 1]}{[1, 2]} \lambda_3^2. \quad (155)$$

が得られる。これを用いると、

$$\delta(\langle 3, 1 \rangle) \delta(\langle 3, 2 \rangle) = -\frac{[1, 2]^2}{(\lambda_3^2)^2} \delta(\lambda_1^1 [1, 2] + \lambda_3^1 [3, 2]) \delta(\lambda_2^1 [2, 1] + \lambda_3^1 [3, 1]). \quad (156)$$

この式は $[1, 1] = [2, 2] = 0$ をもちいて次のように書くことができる。

$$\delta(\langle 3, 1 \rangle) \delta(\langle 3, 2 \rangle) = -\frac{[1, 2]^2}{(\lambda_3^2)^2} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^1 [i, 2] \right) \delta \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^1 [i, 1] \right). \quad (157)$$

二つの δ 関数の argument を適当に取り直せば

$$\delta(\langle 3, 1 \rangle) \delta(\langle 3, 2 \rangle) = \frac{[1, 2]}{(\lambda_3^2)^2} \delta^2 \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^1 \tilde{\lambda}_i^a \right) \quad (158)$$

これを (153) に代入して (155) を用いれば、amplitude は次のようになる。

$$A = [2, 3]^{1-2h_1} [3, 1]^{1-2h_2} [1, 2]^{1-2h_3} \delta^4 \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^a \right) \quad (159)$$

$h_1 = h_2 = +1$ 、 $h_3 = -1$ の場合を見てみると、確かに (142) を再現している。

以上のことから、「4次元のゲージ理論 (146) は、ツイスター空間上のある局所的場の理論に対応しており、その相互作用項は (147) によって与えられる。」ということがわかった。

運動項まで含む作用を書くためには、Cech cohomology の元 φ^A と φ^G の代わりに、複素空間上の (0,1)-形式 A と G を用いるのが便利である。以前に述べたように、 $\bar{\partial}$ コホモ

ロジュー $H_{\bar{\partial}}^1$ と Cech コホモロジュー \check{H}^1 の間には同型関係が存在するので、このような置き換えが可能である。具体的には、次の式によってこの関係を与えることができる。(この関係については [4] の appendix を参照してください。)

$$A(z, \bar{z}) = \varphi^A(z) \partial_{\bar{i}} \theta(z, \bar{z}) d\bar{z}^{\bar{i}}, \quad G(z, \bar{z}) = \varphi^G(z) \partial_{\bar{i}} \theta(z, \bar{z}) d\bar{z}^{\bar{i}}. \quad (160)$$

A および G はそれぞれ $H_{\bar{\partial}}^1(CP^3, \mathcal{O})$ と $H_{\bar{\partial}}^1(CP^3, \mathcal{O}(-4))$ の元である。相互作用項 (147) はこれらの変数を用いて次のように複素 3 次元空間上の積分として書き換えることができる。

$$I_{\text{int}} = \int \Omega_3 \wedge \text{tr}(A \wedge A \wedge G) \quad (161)$$

Ω_3 は CP^3 上の holomorphic 3-形式であり、(160) を代入すれば (147) が得られる。この作用がゲージ不変な形になるように運動項を付け加えると、

$$I = \int \Omega_3 \wedge \text{tr}[(dA + A \wedge A) \wedge G] \quad (162)$$

この作用は次のゲージ変換のもとで不変である。

$$\delta A = d\lambda^A + [A, \lambda^A], \quad \delta G = [G, \lambda^A] + d\lambda^G + [A, \lambda^G]. \quad (163)$$

ただし、 λ^A と λ^G はそれぞれ次数が 0 および -4 の斉次関数である。

2.4 $\mathcal{N} = 4$ SYM と hCS

Witten はツイスター空間上の B-model を考え、インスタントン (ツイスター空間中の D1-brane) の効果を考慮すると、 $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論の散乱振幅の公式をうまく再現できることを示した。ここではまず符号が $++--$ である空間上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論を考え、その相互作用の一部が超ツイスター空間上の holomorphic CS 理論と対応することを見る。

符号が $+++--$ である場合、スピノル表現は複素であるから、R-対称性は $SU(4)$ であり、変換パラメータ ξ^{Ia} と $\bar{\xi}_{\dot{I}\dot{a}}$ は複素共役変換で互いに移りあう。ベクトル多重項は次の場を含む。

$$F_{ab}, \quad \chi^{Ia}, \quad \phi_{IJ}, \quad \bar{\chi}_{\dot{I}\dot{a}}, \quad F_{\dot{a}\dot{b}}. \quad (164)$$

$+++--$ の場合にはこれらは複素共役演算のもとで

$$(F_{ab})^* = F_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\chi^{Ia})^* = \bar{\chi}_{\dot{I}\dot{a}}, \quad (\phi_{IJ})^* = \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} \phi_{KL} \quad (165)$$

という条件が課されている。

しかし時空が $+++--$ である場合には、スピノル表現が実であるから R-対称性は $SL(4, \mathbb{R})$ であり、 ξ^{Ia} と $\bar{\xi}_{\dot{I}\dot{a}}$ は独立な実スピノルとなる。また、成分場 (164) はそれぞれが実であり、複素共役演算のもとで不変である。 ξ と $\bar{\xi}$ が独立なパラメータなので、超対称代数

$\{Q, \bar{Q}\} = P$ を不変に保つ次のスケール変換を考えることができる。(変換パラメータに対する変換として表した。)

$$\xi^I \rightarrow g^{1/2} \xi^I, \quad \bar{\xi}_I \rightarrow g^{-1/2} \bar{\xi}_I. \quad (166)$$

g はあとでゲージ理論の結合定数に取るが、ここでは任意の 0 でない実数である。超対称変換則 (105) についても、 F_{ab} と $F_{\dot{a}\dot{b}}$ がビアンキ恒等式でつながっていることをひとまず無視して、(166) と同時に次の変換を行うと不変である。

$$F_{\dot{a}\dot{b}} \rightarrow F_{\dot{a}\dot{b}}, \quad \bar{\chi}_{I\dot{a}} \rightarrow g^{1/2} \bar{\chi}_{I\dot{a}}, \quad \phi_{IJ} \rightarrow g \phi_{IJ}, \quad \chi_a^I \rightarrow g^{3/2} \chi_a^I, \quad F_{ab} \rightarrow g^2 F_{ab} \quad (167)$$

F_{ab} と $F_{\dot{a}\dot{b}}$ を独立に扱うためには、運動方程式によって $F_{ab} = G_{ab}$ となる補助場 G_{ab} を導入したうえで、

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}, \quad G_{ab} \rightarrow g^2 G_{ab}. \quad (168)$$

とスケール変換を行えばよい。

$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論のラグランジアンを補助場 G_{ab} を用いて書き換えたもの

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{g^2} \text{tr} \left(F_{ab} G^{ab} + \frac{1}{2} G_{ab}^2 + \epsilon^{IJKL} D_\mu \phi_{IJ} D^\mu \phi_{KL} + \epsilon \phi \phi \phi \phi \right. \\ & \left. + \chi^{Ia} D_{a\dot{a}} \bar{\chi}_{I\dot{a}} + \chi^{Ia} \phi_{IJ} \chi_a^J + \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} \bar{\chi}_{I\dot{a}} \phi_{JK} \bar{\chi}_{L\dot{a}} \right) \end{aligned} \quad (169)$$

に対してスケール変換 (167) (ゲージ場に対しては (168)) を行うと、次のように結合定数 g を含まない部分と g^2 に比例する部分との和になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{tr} \left(F_{ab} G^{ab} + \epsilon^{IJKL} D_\mu \phi_{IJ} D^\mu \phi_{KL} + \chi^{Ia} D_{a\dot{a}} \bar{\chi}_{I\dot{a}} + \epsilon^{IJKL} \bar{\chi}_{I\dot{a}} \phi_{JK} \bar{\chi}_{L\dot{a}} \right) \\ & + g^2 \text{tr} \left(\frac{1}{2} G_{ab}^2 + \epsilon \phi \phi \phi \phi + \chi^{Ia} \phi_{IJ} \chi_a^J \right) \end{aligned} \quad (170)$$

A と G についてはこのラグランジアンは (144) と同じである。

この理論に含まれる粒子は全て massless であるから、§2.2 で見たように、相互作用する 3 つの on-shell 粒子の運動量は全て自己双対面か反自己双対面に乗っているはずである。実は、(170) に含まれる三点相互作用のうち、一行目に含まれるものは自己双対面、二行目に含まれるものは反自己双対面に運動量が乗っているときに限り 0 でない振幅を与えることがわかる。従って、 $g \rightarrow 0$ の極限で得られる理論

$$\mathcal{L} = \text{tr} \left(F_{ab} G^{ab} + \epsilon^{IJKL} D_\mu \phi_{IJ} D^\mu \phi_{KL} + \chi^{Ia} D_{a\dot{a}} \bar{\chi}_{I\dot{a}} + \epsilon^{IJKL} \bar{\chi}_{I\dot{a}} \phi_{JK} \bar{\chi}_{L\dot{a}} \right) \quad (171)$$

は、ツイスター空間上の局所的な場の理論と対応すると考えられる。

実はこの理論は、外線が 4 本以上の (tree レベルの) 散乱振幅は 0 になることが知られており、非自明な結果を与えるのは外線が 3 本の場合のみである。(171) に含まれる三点相互作用から得られる散乱振幅をスピノル変数で書いてみよう。 GAA 相互作用についてはすでに見たので、それ以外の相互作用について考える。そのために偏極を次のように取る。

$$\phi^{IJ}(p) = 1, \quad \chi^{Ia}(p) = \lambda^a, \quad \bar{\chi}_{I\dot{a}}(p) = \tilde{\lambda}_{\dot{a}}, \quad A_{a\dot{a}}(p) = \frac{\mu_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}}{\langle \lambda, \mu \rangle}. \quad (172)$$

ここでは R-対称性の添え字は無視する。すると、それぞれの相互作用は次の振幅を与える。

$$\begin{aligned} \text{tr}(\partial\phi[A, \phi]) &: (p_1^\mu - p_2^\mu)A_\mu(p_3) = \lambda_1^a \tilde{\lambda}_1^{\dot{a}} \frac{\mu_a \tilde{\lambda}_{3\dot{a}}}{\langle \lambda_3, \mu \rangle} - (1 \leftrightarrow 2) = \frac{[23][31]}{[12]}, \\ \text{tr}(\chi[A, \bar{\chi}]) &: \lambda_1^a \frac{\mu_a \tilde{\lambda}_{3\dot{a}}}{\langle \lambda_3, \mu \rangle} \tilde{\lambda}_2^{\dot{a}} = \frac{[23]^2}{[12]}, \\ \text{tr}(\chi[\phi, \chi]) &: \lambda_1^a \lambda_{2a} = [12] \end{aligned} \quad (173)$$

これらは全てツイスター空間上の局所的相互作用 (148) から得られる散乱振幅 (159) に一致している。 A 、 G 、 χ^I 、 $\bar{\chi}_I$ 、 ϕ^{IJ} に対応するツイスター空間上の場をそれぞれ φ^A 、 φ^G 、 φ^I 、 φ_I 、 φ^{IJ} とすると、次の相互作用があればよい。

$$I_{\text{int}} = \int \Omega_3 (\varphi^G \varphi^A \varphi^A + \epsilon^{IJKL} \varphi_{IJ} \varphi_{KL} \varphi^A + \varphi^I \varphi_I \varphi^A + \varphi^I \varphi^J \varphi_{IJ}) \quad (174)$$

これは超場

$$\varphi(z, \psi) = \varphi^A(z) + \varphi_I(z) \psi^I + \varphi_{IJ}(z) \psi^I \psi^J + \epsilon_{IJKL} \varphi^I(z) \psi^J \psi^K \psi^L + \varphi^G(z) \psi^1 \psi^2 \psi^3 \psi^4 \quad (175)$$

を定義すれば次のように書くことができる。

$$I_{\text{int}} = \int \Omega_3 d\psi^1 d\psi^2 d\psi^3 d\psi^4 \varphi(z, \psi)^3 \quad (176)$$

ここで、 $H_{\bar{\partial}}^1$ と \check{H}^1 との同型関係を用いて $\varphi(z, \psi)$ に対応する $(0, 1)$ 形式 \mathcal{A} を導入するのが便利である。これは成分場で展開するとゲージ場を成分場で分解すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Z, \bar{Z}, \psi) &= d\bar{Z}^{\bar{I}} \left(A_{\bar{I}} + \psi^A \chi_{\bar{I}A} + \frac{1}{2} \psi^A \psi^B \phi_{\bar{I}AB} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \epsilon_{ABCD} \psi^A \psi^B \psi^C \tilde{\chi}_{\bar{I}}^D + \frac{1}{4!} \epsilon_{ABCD} \psi^A \psi^B \psi^C \psi^D G_{\bar{I}} \right) \end{aligned} \quad (177)$$

となる。それぞれの成分場はツイスター空間上の $(0, 1)$ -形式で、同型関係 $H_{\bar{\partial}}^1 \sim \check{H}^1$ によって $\varphi(z, \psi)$ の成分場とそれぞれ対応している。この \mathcal{A} を用いると、上記の相互作用は次のように書くことができる。

$$I_{\text{int}} = \int \Omega_3 d\psi^1 d\psi^2 d\psi^3 d\psi^4 \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (178)$$

物理的状態が $H_{\bar{\partial}}^1$ で表されるためには、作用は全体としてゲージ不変性を持たなければならない。この条件を満足するものとして holomorphic-Chern-Simons 理論と呼ばれるものがある。その作用は次のように与えられる。

$$I = \frac{1}{2} \int \Omega_3 d\psi^1 d\psi^2 d\psi^3 d\psi^4 \wedge \text{tr} \left(\mathcal{A} \bar{\partial} \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right). \quad (179)$$

実はこの理論も、外線が 4 本以上の散乱振幅は 0 になることが知られている。外線が 3 本の場合に振幅が一致することはすでに示したので、二つの理論の散乱振幅は完全に一致する。

こうして、次の対応があることがわかった。

$$\text{truncated } \mathcal{N} = 4 \quad \leftrightarrow \quad \text{holomorphic CS in super twistor space} \quad (180)$$

2.5 MHV 振幅

n 個のグルーオンの tree レベルの散乱振幅について考えよう。 n 個の外線はどれも $+1$ か -1 の helicity を持つ。外線を全て入る向き、あるいは出る向きにそろえた上で、外線のヘリシティを全て加えたものを、そのプロセスの「helicity の破れ」と呼ぶことにする。たとえば、2 個の負のヘリシティを持っている粒子をぶつけて $n-2$ 個の粒子が出てくる過程を考えると、出てきた $n-2$ 個の粒子が全て $+$ のヘリシティを持っていればヘリシティの破れは n であり、 $n-2$ 個の散乱粒子のヘリシティが全て $-$ であればヘリシティの破れは $4-n$ である。一般に、 n 個の gluon が参加する過程ではヘリシティの破れは n と $-n$ の間の 2 とびの整数値をとる。

tree level ではヘリシティの破れが $\pm n$ の場合は §2.2 で説明したように散乱振幅は 0 である。また、 $\pm(n-2)$ である場合にも外線の本数が 4 本以上の場合には散乱振幅が 0 になることが知られている。[1, 2] たとえば $n=4$ の場合を考えてみると、二つのヘリシティ $-$ の gluon の scattering で二つの gluon が出てきたとき、その出てきたグルーオンの helicity は常にどちらも $-$ であることを意味している。¹

これらのことより、外線の本数が 4 本以上の場合、最もヘリシティの破れが大きいのはヘリシティの破れが $\pm(n-4)$ の場合である。そのような振幅を maximally helicity violating (MHV) 振幅と呼ぶ。以下では $n-2$ 個の外線が $+$ で二つだけが $-$ である場合を MHV、その逆に $n-2$ 個の外線が $-$ で二つだけが $+$ である場合を $\overline{\text{MHV}}$ と呼ぶことにする。 $\overline{\text{MHV}}$ はしばしば googly amplitude とも呼ばれる。実は MHV amplitude はスピノル変数を用いることで次のようにきわめて単純な形に書けることが知られている。[3]

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^b\right) \frac{\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle^4}{\prod_{i=1}^n \langle \lambda_i, \lambda_{i+1} \rangle} \quad (181)$$

ここで、 r と s はヘリシティが $-$ である二つの外線の番号である。外線の本数が $n=3$ の場合には (143) が得られる。右辺の δ 関数は運動量保存を表すが、残りの部分は $\tilde{\lambda}$ を全く含まないことに注目しよう。 $\overline{\text{MHV}}$ を得るには MHV の λ と $\tilde{\lambda}$ を入れ替えればよい。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^b\right) \frac{[\tilde{\lambda}_r, \tilde{\lambda}_s]^4}{\prod_{i=1}^n [\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_{i+1}]} \quad (182)$$

$n=3$ の場合には (142) を再現する。これらがそれぞれの外線について確かに (120) の条件式を満足していることは簡単に確かめることができる。

$\mathcal{N}=4$ の理論での MHV amplitude も知られていて、結果だけを示すと scattering amplitude は次のように与えられる。まず、MHV amplitude は、グラスマン座標 η_I を用いて次のように与えられる。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \eta_i) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^b\right) \delta^8\left(\sum_i \eta_{i,A} \lambda_i^a\right) \frac{1}{\prod_{i=1}^n \langle \lambda_i, \lambda_{i+1} \rangle} \quad (183)$$

$\overline{\text{MHV}}$ については、グラスマン座標として ψ^I を用いたほうがよい。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \psi_i) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^b\right) \delta^8\left(\sum_i \psi_i^A \tilde{\lambda}_i^a\right) \frac{1}{\prod_{i=1}^n [\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_{i+1}]} \quad (184)$$

¹ Peskin の Prob.17.3(b) にはこのことを示せという問題がある。

これらをフェルミオン座標 η あるいは ψ について展開すればさまざまなヘリシティーの外線を持つ振幅が得られる。

例えば、外線の本数が 3 本の場合に (184) を ψ で展開してみよう。 $\delta^8(\sum_i \psi_i^A \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}})$ という因子が 8 個の ψ を含む。これらを 3 本の外線に振り分けることになるので、添え字を気にせずに展開すると次のように表される。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \psi_i) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}\right) \sum_{h_1+h_2+h_3=1} \frac{(\psi_1 \tilde{\lambda}_1)^{2+2h_1} (\psi_2 \tilde{\lambda}_2)^{2+2h_2} (\psi_3 \tilde{\lambda}_3)^{2+2h_3}}{\prod_{i=1}^n [\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_{i+1}]} \quad (185)$$

ここで、 ψ の次数とヘリシティーの関係は波動関数の展開 (108) から読み取ることができる。分母の $\tilde{\lambda}_i$ を二つずつ組み合わせて添え字を縮約するには次のようにするしかない。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \psi_i) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}\right) \sum_{h_1+h_2+h_3=1} (\psi_1)^{2+2h_1} (\psi_2)^{2+2h_2} (\psi_3)^{2+2h_3} \\ \times \frac{[\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3]^{2-2h_1} [\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_1]^{2-2h_2} [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]^{2-2h_3}}{\prod_{i=1}^n [\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_{i+1}]} \quad (186)$$

それぞれのヘリシティーの部分を見ると、(142) や (173) と一致していることがわかる。

MHV amplitude (183) をフーリエ変換することによって twistor space 上の関数としての amplitude $A(\lambda_i, \mu_i, \psi_i)$ を計算しよう。MHV amplitude が運動量保存を表す δ 関数部分を除き $\tilde{\lambda}$ を含まず、

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \eta_{i,A}) = \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}\right) \delta^8\left(\sum_i \eta_{i,A} \lambda_i^a\right) F(\lambda_i) \quad (187)$$

という形をしている。ここで F は $\tilde{\lambda}$ に依存しない次の関数である。

$$F(\lambda_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \langle \lambda_i, \lambda_{i+1} \rangle} \quad (188)$$

(187) をフーリエ変換してツイスター変数 (λ, μ, ψ) の関数に直すと、次のように変形できる。

$$A(\lambda_i, \mu_i, \psi_i^A) = \int d^{2n} \tilde{\lambda} e^{i \sum_i [\mu_i, \tilde{\lambda}_i]} \int d^{4n} \eta e^{i \sum_i \eta_{i,A} \psi_i^A} \delta^4\left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}\right) \delta^8\left(\sum_i \eta_{i,A} \lambda_i^a\right) F(\lambda_i) \\ = \int d^{2n} \tilde{\lambda} \int d^4 x \exp\left(i \sum_i \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} (\mu_{i,\dot{a}} + x_{a\dot{a}} \lambda_i^a)\right) \\ \times \int d^{4n} \eta \int d^8 \theta \exp\left(i \sum_i \eta_{i,A} (\psi_i^A + \theta_a^A \lambda_i^a)\right) F(\lambda_i) \\ = \int d^4 x \int d^8 \theta \left[\prod_i \delta^2(\mu_{i,\dot{a}} + x_{a\dot{a}} \lambda_i^a) \delta^4(\psi_i^A + \theta_a^A \lambda_i^a) \right] F(\lambda_i) \quad (189)$$

この式に含まれる δ 関数は、 n 個の点 $(\lambda_i, \mu_i, \psi_i^A)$ が次の式によって表される面上に乗っていることを表している。

$$\mu_{i,\dot{a}} = x_{a\dot{a}} \lambda_i^a, \quad \psi_i^A = \theta_a^A \lambda_i^a. \quad (190)$$

これは super twistor space に holomorphic に埋め込まれた P^1 を表している。外線の波動関数 $\varphi_i(\lambda_i, \mu_i, \psi_i^A)$ が与えられれば、振幅 \mathcal{M} は μ 積分と ψ 積分を実行することで次のように書くことができる。

$$\mathcal{M} = \int d^4x \int d^8\theta \prod_i \left[\int \langle \lambda_i, d\lambda_i \rangle \varphi_i(\lambda_i, x_{a\dot{a}}\lambda_i^a, \theta_a^A \lambda_i^a) \right] F(\lambda_i) \quad (191)$$

ここで、外線の twistor 座標の積分において $f(\lambda) = 1$ のようなゲージ固定を行い、積分測度のボゾン部分を $\epsilon_{abcd}z^a dz^b dz^c dz^d = \langle \lambda, d\lambda \rangle d^2\mu$ のように取った。たとえば $\lambda^1 = 1$ の場合には確かにそうなることは簡単に確かめられる。

振幅 (191) の中では P^1 上の座標として λ が用いられており、 λ と μ について取り扱いが異なる。 λ と μ の扱いを対称にするために P^1 上の斉次座標 (σ_1, σ_2) を導入し、 λ をその線形関数として $\lambda^a = u_p^a \sigma_p$ と与えることにしよう。 u_p^a は定数の係数である。これに伴い (190) も σ を用いて書き換えると、全ての twistor 座標が σ の関数として書ける。

$$\lambda^a(\sigma_i) = u_p^a \sigma_i^p, \quad \mu^{\dot{a}}(\sigma_i) = x'_{p\dot{a}} \sigma_i^p, \quad \psi^A(\sigma_i) = \theta_p^A \sigma_i^p. \quad (192)$$

ここで次の変数を導入した。

$$x'_{p\dot{a}} = x_{a\dot{a}} u_p^a, \quad \theta_p^A = \theta_a^A u_p^a. \quad (193)$$

このような変数変換のもとで

$$F(\lambda_i) = (\det u)^{-n} \frac{1}{\prod_i \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}}, \quad d^4x d^8\theta = (\det u)^2 d^4x' d^8\theta', \quad \langle \lambda, d\lambda \rangle = (\det u) \sigma \cdot d\sigma. \quad (194)$$

であり、 \mathcal{M} は次のように書くことができる。

$$\mathcal{M} = (\det u)^2 \int d^4x' \int d^8\theta' \prod_i \left[\int \sigma_i \cdot d\sigma_i \varphi_i(\lambda^a(\sigma_i), \mu^{\dot{a}}(\sigma_i), \psi^A(\sigma_i)) \right] \frac{1}{\prod_i \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \quad (195)$$

(195) において u と x' 、 θ' の扱いが異なるためにまだ λ と μ の非対称性があるように見えるが、実はさらに、

$$(\det u)^2 \int d^4x' d^8\theta' = \int \frac{d^4u d^4x' d^8\theta'}{\text{vol GL}(2)} \quad (196)$$

と書くことが出来ることから、上の式が完全に μ と λ の間で対称であることがわかる。ただし、右辺の $1/\text{vol GL}(2)$ は P^1 上の $SL(2)$ 変換と斉次座標 (λ, μ, ψ) のスケール変換をあわせた $GL(2)$ 変換をゲージ固定することを表しており、行列 u_p^a をある定数に固定するようなゲージ固定を行えば、 u 積分が消えると同時に FP-determinant として $(\det u)^2$ が得られ、(196) の左辺が得られる。

さらに $\varphi_i(\lambda^a(\sigma_i), \mu^{\dot{a}}(\sigma_i), \psi^A(\sigma_i))$ を単に $\varphi_i(\sigma_i)$ と書くことにすると、(195) が次のように表される。

$$\mathcal{M} = \int \frac{d^4u d^4x' d^8\theta'}{\text{vol GL}(2)} \prod_i \left[\frac{\int \sigma_i \cdot d\sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \varphi_i(\sigma_i) \right] \quad (197)$$

2.6 弦理論による解釈

前の節で、truncated $\mathcal{N} = 4$ 理論の散乱振幅を super twistor 空間上の holomorphic CS 理論が再現することを見た。(truncate されていない) $\mathcal{N} = 4$ 理論は、IIB 型弦理論の D3-brane 上の理論として与えられることはよく知られている。これに対して、super twistor 空間上の holomorphic CS 理論を与えるような弦理論も存在する。それは super twistor 空間をターゲット空間とする B-model である。

B-model は Calabi-Yau 空間をターゲット空間とする位相的弦理論の一種である。超対称性が $\mathcal{N} = 4$ の場合のツイスター空間 $\mathbb{C}P^{3|4}$ は Calabi-Yau であるので、その上の B-model を定義することができる。U(N) ゲージ理論を考えるために、ツイスター空間を埋め尽くすような N 枚の D5-brane を考える。(正確には D(5|8)-brane と呼ぶべきかも知れないが、ここでは [4] に従って単に D5-brane と呼ぶことにする。

このブレーンの上には $(0, 1)$ 形式の場が存在している。厳密には \mathcal{A} は一般の $(0, 1)$ -形式であるとして、その BRS コホモロジーとして物理的状态を決定しなければならないが、実際にその手続きを実行すると $\bar{\psi}$ に関係する部分は全て非物理的状态となることがわかる。従って簡便方として D5-ブレーンは (z, \bar{z}, ψ) 方向にのみ広がっており、 $\bar{\psi}$ 方向に対しては $\bar{\psi} = 0$ に位置していると形式的にみなすこともできる。§2.4 で現れたゲージ場 \mathcal{A} はこのようなブレーン上の場である。

Witten は、B-model 側での非摂動的な効果を取り入れることにより、truncate されていない、full な $\mathcal{N} = 4$ 理論の散乱振幅を完全に再現できるということに気づいた。例えば MHV 振幅 (197) について Witten は twistor space 上の holomorphic なサイクルに巻きついた D1-brane の寄与を与えるものと解釈した。[4] D-instanton と D5-brane 上のゲージ場 \mathcal{A} が相互作用している amplitude は次のように与えられるであろう。

$$\int_{\text{moduli}} \mathcal{A}_1(Z(\sigma_1)) \mathcal{A}_2(Z(\sigma_2)) \cdots \mathcal{A}_n(Z(\sigma_n)) \langle J(\sigma_1) J(\sigma_2) \cdots J(\sigma_n) \rangle \quad (198)$$

ここで、moduli の積分は D1-brane の埋め込み方に対する積分であり、 \mathcal{A}_i は D1-brane 上の場と相互作用している D5-brane 上の外場、 J は \mathcal{A} と結合した D1-brane 上の場で書かれたカレント演算子である。 $\langle J \cdots J \rangle$ は D1-brane 上の相関関数を表している。

D1-brane 上の理論の作用を

$$I_{D1} = \int_{\mathcal{P}^1} dz \alpha (\bar{\partial} + \mathcal{A}) \beta \quad (199)$$

と仮定すると (α と β は 1-5 string のモードから現れる場)、プロパゲータは $1/(\sigma_i - \sigma_j) \sim 1/(\sigma_i \cdot \sigma_j)$ となり、振幅公式中の因子 $\frac{1}{\prod_i \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}}$ を与えることができる。(ただし、うまい順序で contraction する必要がある。contraction のやり方によっては multi-trace amplitude が得られる。これは conformal gravity の寄与を表すと考えられている。)

2.7 MHV 頂点 (disconnected prescription)

D_C を物理的な instanton と考えると、connected instanton からだけではなく、disconnected instanton からの寄与もありそうに思われる。このアイデアのもと、twistor 空間上

でのファインマンルールを与え、それが期待される結果を再現することを多くの例についてチェックした。[12] それについて以下で説明する。

まず、天下りの的にファインマンルールを与えよう。

- 頂点としては MHV amplitude を用いる。
- 内線のプロパゲータとしては、内線運動量を p として $\frac{1}{p^2}$ を用いる。

さらに、この二つのルールだけでは不十分な点がある。それは、内線の運動量を与えられたときに、スピノル変数をどのように定義するかということが定義されていないからである。頂点はスピノル変数 λ で書かれているから、内線が与えられたときにその運動量に対応するスピノル変数 λ が必要になる。しかしながらこれまでの定義 (25) は p が on-shell の場合にだけ用いることができる。

[12] において提案されたルールは次のものである。

- 内線運動量 p に対しては、対応するスピノル変数は次のように定義する。

$$\lambda_a = p_{a\dot{a}}\eta^{\dot{a}} \quad (200)$$

ただし $\eta^{\dot{a}}$ は任意の定数スピノルである。

あとで説明するように、グラフについて足し上げたあとに得られる計算結果は η によらない。この定義は、 p が on-shell の場合には以前の定義と定数因子をのぞき一致する。実際、(200) の右辺に (25) を代入してみれば、 $\lambda_a[\tilde{\lambda}, \eta]$ となる。

2.8 計算例 (−, −, −, +)

ここで、簡単な例として − − − + の計算を与えておこう。これには二つのグラフが寄与する。(a) のグラフに対して上記のファインマンルールを適用すると、次のようになる。

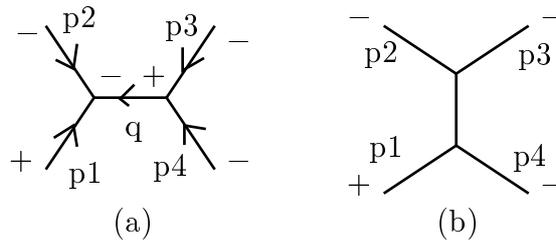


図 4: 外線のヘリシティが (−, −, −, +) の散乱振幅に寄与する二つのファインマン図形

$$I_{(a)} = \frac{\langle \lambda_2, \lambda_q \rangle^3}{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle \lambda_q, \lambda_1 \rangle} \frac{1}{q^2} \frac{\langle \lambda_3, \lambda_4 \rangle^3}{\langle \lambda_4, \lambda_q \rangle \langle \lambda_q, \lambda_3 \rangle} \quad (201)$$

ただし、 λ_q は内線運動量に対応するスピノル変数で、次のように与えられる。

$$\lambda_q = q\eta = -(p_1 + p_2)\eta = -\lambda_1[\tilde{\lambda}_1, \eta] - \lambda_2[\tilde{\lambda}_2, \eta] = \lambda_3[\tilde{\lambda}_3, \eta] + \lambda_4[\tilde{\lambda}_4, \eta] \quad (202)$$

これを $I_{(a)}$ に代入すれば、

$$I_{(a)} = \frac{\phi_1^3}{\phi_2\phi_3\phi_4} \frac{1}{q^2} \langle \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle \lambda_3 \lambda_4 \rangle \quad (203)$$

さらに $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1p_2 = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]$ を代入すれば、

$$I_{(a)} = \frac{\phi_1^3}{\phi_2\phi_3\phi_4} \frac{1}{q^2} \frac{\langle \lambda_3, \lambda_4 \rangle}{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]} \quad (204)$$

$I_{(b)}$ については再び計算を繰り返す必要は無く、 $I_{(a)}$ において単に外線の番号 2 と 4 を入れ替えるだけでよい。このようにして得られた $I_{(a)}$ と $I_{(b)}$ を加えると、

$$\begin{aligned} I_{(a)} + I_{(b)} &= \frac{\phi_1^3}{\phi_2\phi_3\phi_4} \frac{1}{q^2} \left(\frac{\langle \lambda_3, \lambda_4 \rangle}{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]} + \frac{\langle \lambda_3, \lambda_2 \rangle}{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_4]} \right) \\ &= -\frac{\phi_1^3}{\phi_2\phi_3\phi_4} \frac{1}{q^2} \frac{\langle \lambda_3, \lambda_4 \rangle [\tilde{\lambda}_4, \tilde{\lambda}_1] + \langle \lambda_3, \lambda_2 \rangle [\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_1]}{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2][\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_4]} \\ &= -\frac{\phi_1^3}{\phi_2\phi_3\phi_4} \frac{1}{q^2} \frac{\sum_{i=1}^4 \langle \lambda_3, \lambda_i \rangle [\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_1]}{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2][\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_4]} \end{aligned} \quad (205)$$

最後の表式に含まれる $\sum_{i=1}^4 \lambda_i \tilde{\lambda}_i$ は運動量保存則により 0 になるので amplitude は 0 になり、正しい結果を再現していることがわかる。

ここまでは主に外線にゲージ場のみを含む amplitude を問題にしてきたが、フェルミオンまで含む場合は [16] によって考察された。

MHV vertex を用いた googly amplitude の計算は、vertex の数についての数学的帰納法を用いることで [13] で示された。

2.9 振幅の共変性について

amplitude がローレンツ共変性を持つこと、すなわち η 依存しないことを示そう。ここでは $-$ の外線が 3 本ある amplitude に話を限る。これは次の形で表されるグラフの寄与を全て加えることで得られる。

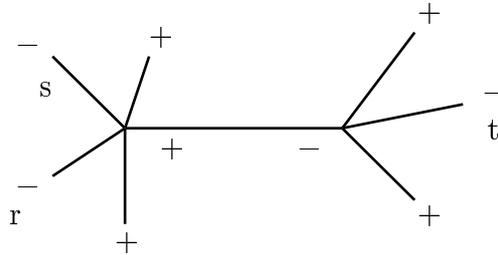


図 5: $-$ 外線を 3 本持つグラフの例。 $-$ 外線のラベルを r, s, t とする。

$$I_{\Gamma} = \frac{\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle^4}{\prod \langle \lambda_i, \lambda_{i+1} \rangle} \frac{1}{P^2} \frac{\langle \lambda, \lambda_t \rangle^4}{\prod \langle \lambda_j, \lambda_{j+1} \rangle} = \frac{1}{P^2} g(\lambda) \quad (206)$$

ただし、二つの MHV 頂点の分母の積にはどちらも内線運動量から作った $\lambda^a = P^{ab}\eta_b$ が含まれている。この式の $1/P^2$ 以外の部分を単に $g(\lambda)$ と書くことにしよう。これは λ^a の 0 次の斉次有理関数である。(200) からは λ のスケール因子は決まらないが、 $g(\lambda)$ は λ のスケール変換で不変であるので問題にならない。

この amplitude が η の選び方に依存しないことを証明しよう。そのために、 I_Γ が次のように η を含まない積分に書き換えられることを示す。

$$I_\Gamma = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle [\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}] \frac{1}{(P\lambda\tilde{\lambda})^2} g(\lambda) \quad (207)$$

この式中の積分の中身は重み 0 の meromorphic 2-form であるから $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ 中の 2-cycle 上の積分として意味を持つ。

次に $\tilde{\lambda}$ 積分を実行したい。そのためにまず次のように変形する。

$$\frac{[\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}]}{(P\lambda\tilde{\lambda})^2} = \frac{1}{(P\lambda\eta)} d\tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \left(\frac{[\tilde{\lambda}, \eta]}{(P\lambda\tilde{\lambda})} \right) \quad (208)$$

この式が成り立つことを示すには、右辺で $\tilde{\lambda}$ 微分を実行した上でフィルツ変換を実行すればよい。

これを (207) に代入すれば、

$$I_\Gamma = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle \frac{g(\lambda)}{(P\lambda\eta)} d\tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \left(\frac{[\tilde{\lambda}, \eta]}{(P\lambda\tilde{\lambda})} \right) \quad (209)$$

となる。さらに計算を進めるためには部分積分を行う必要があるが、そのためには積分を行う 2-cycle を指定し、偏微分をその上の偏微分として書き換える必要がある。ここでは計量が $+++ -$ であると仮定し、 $\tilde{\lambda}$ が λ の複素共役であるような 2-cycle を取るものとする。さらに P が timelike であると仮定すれば、 $P\lambda\tilde{\lambda} \neq 0$ が保障される。timelike ではない P に対しては解析接続によって定義する。この場合、上の式は次のように書き換えることができる。

$$I_\Gamma = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle \frac{g(\lambda)}{(P\lambda\eta)} d\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \right) \left(\frac{[\tilde{\lambda}, \eta]}{(P\lambda\tilde{\lambda})} \right) \quad (210)$$

なぜなら、まずひとつに、右辺が $\bar{\lambda}$ を含まないから $\bar{\lambda}$ による微分はほとんどの点で 0 になる。「ほとんどの点」といったのは、例えば $\partial_z(1/z) \sim \delta(z)$ からわかるように、微分される関数が pole を持つと、その点で δ 関数的な寄与を与えるが、上で述べたように $P\lambda\tilde{\lambda} \neq 0$ であるからそのような点は存在しない。

$\partial/\partial \tilde{\lambda} + \partial/\partial \bar{\lambda}$ は $\tilde{\lambda} = \bar{\lambda}$ によって定義された 2-cycle 上の偏微分とみなすことができる。こうなると、部分積分を行うことができる。以下ではこの 2-cycle 上に制限された状況だけを考えることにし、 $\tilde{\lambda}$ と $\bar{\lambda}$ を同一視する。そしてこのことを踏まえたうえで $\partial/\partial \tilde{\lambda} + \partial/\partial \bar{\lambda}$ を単に $\partial/\partial \tilde{\lambda}$ と書くことにする。部分積分を行った結果、次の式を得る。

$$I_\Gamma = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle \frac{[\tilde{\lambda}, \eta]}{(P\lambda\tilde{\lambda})} d\tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \frac{g(\lambda)}{(P\lambda\eta)} \quad (211)$$

一般に、次の式が成り立つ。

$$d\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{\langle \zeta, \lambda \rangle} = 2\pi \bar{\delta}(\langle \zeta, \lambda \rangle) \quad (212)$$

この式を用いることで、

$$I_{\Gamma} = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle \frac{[\tilde{\lambda}, \eta]}{(P\lambda\tilde{\lambda})} \bar{\delta}(P\lambda\eta) g(\lambda) + \dots \quad (213)$$

… は微分が $g(\lambda)$ の pole に作用した時に現れる項を表しているが、それらは Γ についての和を取れば結局 0 になることを示すことができる。さらに、この積分を実行するために次の公式を用いる。

$$\int \langle \lambda, d\lambda \rangle \bar{\delta}(\langle \zeta, \lambda \rangle) B(\lambda) = B(\zeta) \quad (214)$$

これを用いることで

$$I_{\Gamma} = \frac{[\tilde{\lambda}, \eta]}{\langle P\tilde{\lambda}, P\eta \rangle} g(P\eta) = \frac{1}{P^2} g(P\eta) \quad (215)$$

これはまさにファインマンルールから与えられる式 (206) に他ならない。

2.10 プロパゲータの導出

twistor space 上の理論は holomorphic CS 理論になっていると考えられる。[4] この理論の運動項は $A\bar{\partial}A$ という形をしており、プロパゲータは、 $\lambda^1 = \lambda'^1 = 1$ という座標を取れば次の微分方程式の解として与えられる。

$$\bar{\partial}G = \frac{1}{(2\pi)} \bar{\delta}(\lambda'^2 - \lambda^2) \bar{\delta}(\mu'^1 - \mu^1) \bar{\delta}(\mu'^2 - \mu^2) \quad (216)$$

ここでは座標変数はすべて複素であるとして扱うことに注意。これは、たとえば次のように解くことができる。

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \bar{\delta}(\lambda'^2 - \lambda^2) \bar{\delta}(\mu'^i - \mu^i) \frac{1}{\mu'^2 - \mu^2} \quad (217)$$

フェルミオン座標に対しては $\bar{\partial}$ は作用しないので $\delta^4(\psi'^A - \psi^A)$ という因子を与えるが、ここでは省略する。

ここで、3 つの座標について非対称な取り扱いをしているが、これは $\bar{\partial}f = 0$ を満足する関数を G に加えることによって互いに移りあうことができる。

このプロパゲータの意味を見るために、プロパゲータの両端が乗る二つの line が $(\mu'^1, \mu'^2) = \text{const}$ (すなわち λ^2 方向に伸びている) および $(\lambda^2, \mu'^2) = \text{const}$ (すなわち μ^1 方向に伸びている。) と与えられるような場合を考えてみよう。この場合、プロパゲータの二つの端点の line 上の位置はそれぞれ λ'^2 と μ^1 によって指定される。これらの端点の位置についての積分によって、(217) に含まれる二つの δ 関数は消える。その結果残るのは、二つの line の間の距離によって決まる $1/(\mu'^2 - \mu^2)$ という因子である。すなわち、プロパゲータ

G は、その両端の位置の line 上での積分の結果、二つの line の相対距離に反比例するような pole を与える。

もう少し一般的にそれぞれの line が次のように与えられているとしよう。

$$\mu^{\dot{a}} = x^{a\dot{a}} \lambda_a, \quad \mu'^{\dot{a}} = x'^{a\dot{a}} \lambda'_a. \quad (218)$$

この場合、(217) に含まれる δ 関数を用いて λ'^2 積分を実行すれば $\lambda'^a = \lambda^a$ を得、これを代入すれば、

$$\int d\lambda'^2 G = \bar{\delta}(\mu'^{\dot{1}} - \mu^{\dot{1}}) \frac{1}{\mu'^2 - \mu^2} = \bar{\delta}(y^{1\dot{1}} \lambda^2 - y^{2\dot{1}}) \frac{1}{y^{1\dot{2}} \lambda^2 - y^{2\dot{2}}} \quad (219)$$

ただし、 $y = x' - x$ を定義した。さらに、 λ^2 で積分すれば、

$$\int d\lambda'^2 d\lambda^2 G = \frac{1}{y^{1\dot{1}}} \frac{1}{y^{1\dot{2}} (y^{2\dot{1}}/y^{1\dot{1}}) - y^{2\dot{2}}} = \frac{1}{y^{ab} y_{ab}} \quad (220)$$

外線の波動関数に含まれる $\exp(i[\mu, \tilde{\lambda}_i])$ という因子を集めて、(190) を用いると、 $\exp(ixP - ix'P)$ という因子が得られる。さらにモジュライ変数 $y = x - x'$ に対する積分を行うことは、このプロパゲータを運動量表示で見ることに対応する。

$$G(P) = \int \frac{d^4 y}{y^2} e^{iyP} \quad (221)$$

ただし P は時空上の内線運動量であり、ここで行っている y 積分は curve の moduli 積分の一部であることに注意すること。モジュライパラメータ y は複素数に拡張されているから、この積分は積分路を指定しなければ意味がない。積分路をどのように指定すべきなのかは知られていないが、ここでは $d^4 y/y^2$ の pole を拾うように取るものとする。すると、次のものが残る。

$$G(P) = \int t dt \langle \lambda, d\lambda \rangle [\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}] e^{iyP} \quad (222)$$

ここで、pole 上では $y^2 = 0$ であるから、 $y = t\lambda\tilde{\lambda}$ のように分解できること、および $SL(2)$ 対称性を用いた。ただし $y = t\lambda\tilde{\lambda}$ であり、 t は λ と $\tilde{\lambda}$ の scaling のもとでそれぞれ weight -1 でふるまうとする。 t 積分の積分範囲を適当に取れば (たとえば 0 から ∞ まで積分すれば) (207) 中のプロパゲータを得る。

$$G(P) = \int \langle \lambda, d\lambda \rangle [\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}] \frac{1}{(P\lambda\tilde{\lambda})^2} \quad (223)$$

2.11 MHV 振幅以外への一般化 (connected prescription)

Witten は、巻きつき数が 1 より大きい曲面を考えることで、MHV 以外の amplitude も MHV の場合と形式的には全く同じ次の式で与えられると予想した。[4]

$$\mathcal{M} = \int_{\text{moduli}} \prod_{i=1}^n \left[\int \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \rho_C \varphi_i(\sigma_i) \right] \quad (224)$$

$i = 1, \dots, n$ は n 本の外線をラベルする添え字である。 ρ_C は次の式によって与えられる curve 上への制限を表す。

$$\lambda^a(\sigma), \quad \mu^{\dot{a}}(\sigma), \quad \psi^A(\sigma). \quad (225)$$

(225) の 3 つの関数はどれも $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ の d 次の斉次関数であり、 P^1 が d 回 super twistor 空間 $P^{3|4}$ に巻きついている様子を表している。 $d = 1$ の場合が以前に調べた MHV amplitude である。 moduli 積分はその巻きつきの仕方に対する積分であり、具体的には関数 (225) を σ の関数として表したときの $d + 1$ 個の係数についての積分として表される。ただし、(225) の全ての関数に共通な因子を掛けるような自由度はゲージ自由度であるから固定しておかなければならない。また、 P^1 上の座標の取り方についても座標変換 $SL(2)$ の分の 3 つの自由度を除いておかなければならない。

ここでは moduli parameter を次のように取る。

$$\begin{aligned} \lambda^a(\sigma) &= P^a(\sigma) = \sum_{k=0}^d P_k^a u_k(\sigma), \\ \mu^{\dot{a}}(\sigma) &= Q^{\dot{a}}(\sigma) = \sum_{k=0}^d Q_k^{\dot{a}} u_k(\sigma), \\ \psi^A(\sigma_i) &= R^A(\sigma) = \sum_{k=0}^d R_k^A u_k(\sigma). \end{aligned} \quad (226)$$

P_k^a 、 $Q_k^{\dot{a}}$ 、 R_k^A がモジュライパラメータであり、 $d = 1$ の場合にはそれぞれ前節の u_p^a 、 $x'_{p\dot{a}}$ 、 θ_p^A に対応している。 $d + 1$ 個の関数 $u_k(\sigma)$ ($k = 0, \dots, d$) は P^1 上の d 次関数の完全系で、たとえば $u_k(\sigma) = (\sigma_1)^k (\sigma_2)^{d-k}$ を取ることができる。この関数の組をどのように取り替えてもボゾンの積分とフェルミオンの積分の次元が同じであるためにその際に現れるヤコビアンは相殺する。従って u_k の取り方は (224) の積分測度には影響を与えない。このようにして定義された measure を単に $d^{2(d+1)} P d^{2(d+1)} Q d^{4(d+1)} R$ と書くことにする。

一般の d に対して上記の積分がどのような外線のヘリシティを持った amplitude を与えるかを見るために、モジュライパラメータのうちのフェルミオン変数 R_k^A による積分に注目しよう。これは n 本の外線の波動関数の積の中から ψ の $4(d + 1)$ 次に依存する項のみを取り出す。それぞれの外線のヘリシティが h_i であれば、その波動関数は ψ^{2-2h_i} に比例しているので、この条件は

$$\sum_{i=1}^n (1 - h_i) = 2(d + 1) \quad (227)$$

を意味している。 $d = 1$ の場合には確かに上で議論した MHV を与える。

bosonic な変数についても、積分の個数と被積分関数に含まれる δ 関数の個数との関係について見ておこう。平面波の波動関数 (119) にはもともと n 個の δ 関数が含まれており、 $d^{2d+2} Q_k^{\dot{a}}$ の積分を行うと、波動関数の \exp 因子からさらに $2d + 2$ 個の δ 関数が得られる。こうして得られた $2d + 2 + n$ 個の δ 関数は残りの moduli 積分、すなわち $d^{2d+2} P$ と $d^n \sigma$ を行うことで消費されるが、積分変数のうち 4 つの自由度はゲージ固定されるので、最終的に 4 つの δ 関数が残り、これが運動量保存則を与える。

もし外線が全てグルーオンであり、 $h_i = \pm 1$ の場合には、 $h_i = -1$ である外線の本数が $d+1$ であることを意味している。以下では $+1$ 外線の本数を p 、 -1 外線の本数を q と置く。次の関係が成り立つ。

$$p + q = n, \quad q = d + 1. \quad (228)$$

実際に散乱振幅が上の式によって得られることをチェックするため、これまでに以下のような解析が行われている。

1. Witten は最初の論文 [4] において amplitude $A(\lambda_i, \mu_i)$ が 0 でないのは n 個の点 (λ_i, μ_i) が、次数 $q-1$ の curve 上にあるときであることを幾つかの小さな (p, q) について示した。上で述べたように、MHV 以外の場合にはフーリエ変換を解析的に実行することは困難である。そこで [4] では次のような方法でしめした。まず、curve 上にあるときに 0 になる多項式 $F(\lambda_i, \mu_i)$ を構成する。これを用いて、

$$F(\lambda_i, \partial/\partial \tilde{\lambda}_i) A(\lambda, \tilde{\lambda}) = 0 \quad (229)$$

をしめすのである。 $(p, 2)$ は MHV であるから任意の p で成り立つことは上で示したようにすぐにわかる。これ以外に $(p, q) = (2, 3), (3, 3)$ について示している。($(3, 3)$ の場合には部分的に数値的に示している。)

2. [10, 11] では $(p, q) = (2, q)$ の $\overline{\text{MHV}}$ amplitude を (224) から出発して計算し、実際に期待される amplitude が得られることを示した。ここで計算のポイントとなるのは、moduli 積分を行って $A(\lambda, \mu)$ を求めてからそのフーリエ変換として $A(\lambda, \tilde{\lambda})$ を計算するのではなく、moduli 積分の前にフーリエ変換を行ってしまうことである。この方法で、まず $(p, q) = (2, 3)$ の場合が [10] で、その後 [11] で一般の q について計算された。
3. その後 witten は [15] において (224) から出発して得られる (p, q) amplitude は、 p と q の入れ替えに対して不変であることを示した。このことを用いれば MHV が (224) で与えられることを用いれば $\overline{\text{MHV}}$ も同じく (224) で与えられることが示されたことになるので、この結果は [10, 11] の結果を含んでいる。

MHV 以外への上記の一般化の一つの例として、 $+$ 外線が二本で $-$ 外線が 1 本の場合、すなわち $p = 2, q = 1$ の場合に公式 (224) を適用すると、局所的な三点相互作用が再現されることを見ておこう。 $q = 0$ の場合は巻き付き数が 0 のインスタントンに対応する。この相互作用はツイスター空間上の局所的相互作用であるから、インスタントンを考慮しなくても存在するのであるが、以下のように形式的に small インスタントンの効果とみなすこともできる。

$d = 0$ であるから、

$$\lambda^a(\sigma) = P^a, \quad \mu^{\dot{a}}(\sigma) = Q^{\dot{a}}, \quad \psi^A(\sigma) = R^A, \quad (230)$$

は全て σ に依存しない定数である。(224) の R 積分を実行して欲しいヘリシティの部分だけを抜き出すと、次の式を得る。

$$\mathcal{M} = \int \Omega_3 \left(\frac{1}{\text{vol SL}(2)} \prod_{i=1}^3 \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \right) \varphi_1(z) \varphi_2(z) \varphi_3(z). \quad (231)$$

σ 積分は単に数を与えるだけであり、その結果 (147) が得られる。

2.12 パリティ不変性

Yang-Mills 理論はヘリシティーを反転させるパリティ変換のもとで不変であるが、この対称性はツイスター空間上では見えなくなる。たとえば MHV amplitude が $d = 1$ の curve によって与えられるのに対して、そのパリティ変換である $\overline{\text{MHV}}$ amplitude は $d = n - 3$ の curve によって与えられる。これらは見かけ上全く異なる積分として与えられる。

MHV amplitude については前に述べたように、スピノル変数 $(\lambda, \tilde{\lambda})$ で書かれた amplitude フーリエ変換してツイスター変数 (λ, μ) を用いて書き換えると、それが $d = 1$ 曲面のモジュライ積分として与えられることが示される。[4]

$$A(\lambda, \tilde{\lambda}) \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} A(\lambda, \mu) \xleftarrow{\text{moduli 積分}} \int_{\text{moduli}} \dots \quad (232)$$

$\overline{\text{MHV}}$ については amplitude が $\tilde{\lambda}$ の非自明な関数となっているために、フーリエ変換を行ってツイスター空間上の amplitude として解析的に表すことは困難であるが、演算の順序を入れ替えて curve の moduli 積分の式の被積分関数をまずフーリエ変換し、その後で moduli 積分を行うと確かに MHV をパリティ変換して得られる amplitude が得られることが確認される。

$$A(\lambda, \tilde{\lambda}) \xleftarrow{\text{moduli 積分}} \int_{\text{moduli}} \dots \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} \int_{\text{moduli}} \dots \quad (233)$$

実際この方法で、まず $(p, q) = (2, 3)$ の場合が [10] で、その後 [11] で一般の q について計算された。

その後、amplitude のパリティ変換不変性は MHV 以外の amplitude についても成り立つことが示されている。[15] に従って Parity 不変性を証明しよう。ここで考えるのは、(224) の外線として平面波 (119) を用いたものである。これらは外線のパラメータ $(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i)$ に依存するが、それは最初に考えた amplitude $A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i)$ にほかならない。

準備として (224) を扱いやすい形に変形しておこう。

まず関数系 u_k の取り方を決めて moduli パラメータのとり方を決めてよう。基底関数 u_k がちょうど - 外線の本数と同じ q 個あるので、 u_k のそれぞれを - 外線それぞれに対応するように取っておくのが便利である。つまり、 $h = -$ 外線の index の集まりを I_- とおき、 u_k のラベルを $k \in I_-$ とする。そしてそれらの関数を次の条件を満足するように取る。

$$u_k(\sigma_i) = \delta_{k,i}, \quad k, i \in I_- \quad (234)$$

ここで行う計算では、 σ_i 積分を実際に行うことはしないので、 σ_i は curve 上の固定された点であると思っておいてよい。 u_k は $q - 1$ 次の斉次多項式でそれぞれ q 個の係数を持つので、上記の条件式によって u_k はそれぞれ一意的に決定される。このように取っておけば係数 P_k^a は点 σ_k ($k \in I_-$) における関数の値 $P^a(\sigma_k)$ と同一視することができる。 Q_k^a と R_k^A についても同様である。

このように基底を取るものの一つの利点は、フェルミオンのモジュライ積分が簡単になることである。 $R^A(\sigma)$ という関数は - 外線の波動関数 φ_i ($i \in I_-$) の中に 4 つずつ含まれているが、上で述べたように R_k^A による積分はそれらの関数を単に取り除く役割を果たす。

平面波 (119) を用い、 R 積分を実行すると、(224) は次のようになる。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) = \int \frac{d^{2q} P d^{2q} Q}{\text{vol GL}(2)} \prod_{i \in n} \left[\frac{\int \sigma_i \cdot d\sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \left(\frac{\lambda_i}{P(\sigma_i)} \right)^{1-2h_i} \delta(\langle P(\sigma_i), \lambda_i \rangle) \exp(i(\lambda_i/P(\sigma_i))[Q(\sigma_i), \tilde{\lambda}_i]) \right] \quad (235)$$

σ_i それぞれのスケール変換のもとでの不変性を用いることで次のように書き換えることができる。

$$\int \sigma_i \cdot d\sigma_i \delta(\langle P(\sigma_i), \lambda_i \rangle) = \int d^2 \sigma_i \delta^2(P(\sigma_i) - \lambda_i) \quad (236)$$

このように変形することで、 σ_i と λ_i を独立に rescale する自由度は失われてしまい、 $\lambda_i \rightarrow \alpha \lambda_i$ に対して $\sigma_i \rightarrow \alpha^{1/(q-1)} \sigma_i$ のように連動させなければならない。(ただしこれは $q > 1$ の場合にのみ可能であることに注意しよう。) このように対称性が減ったものの、何度も現れる $\lambda(\sigma_i)/\lambda_i$ という因子を 1 にすることができるので便利である。

その結果 (235) は次のように書き換えられる。

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) = \int \frac{d^{2q} P d^{2q} Q}{\text{vol GL}(2)} \prod_{i \in n} \left[\int \frac{d^2 \sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \delta^2(P(\sigma_i) - \lambda_i) \exp(i[Q(\sigma_i), \tilde{\lambda}_i]) \right] \quad (237)$$

どの外線が + でどの外線が - かという情報は、 P および Q の積分の measure を定義するとき用いる基底 (234) に含まれている。

まず、 Q の積分についてみてみよう。 Q 積分に関係するのは次の部分である。

$$\int d^{2d+2} Q \prod_{i \in n} \exp(i[Q(\sigma_i), \tilde{\lambda}_i]) \quad (238)$$

ここからは次の $2q$ 個の拘束条件が得られる。

$$\sum_i u_k(\sigma_i) \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} = 0. \quad (239)$$

これを $\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ に対する条件式とみなそう。添え字 i は n 個の値を取り、 k は q 個の値を取るから、(239) は p 個の独立な解を持つ。Witten はこの拘束条件が $p-1$ 次の斉次多項式 \tilde{P} を用いて次のように解けることを示した。[15]²

$$\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} = \frac{\tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma_i)}{\prod_{k \neq i} (\sigma_k \cdot \sigma_i)} \quad (240)$$

\tilde{P} は p 個の独立な $p-1$ 次斉次多項式を用いて次のように展開することができる。

$$\tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma) = \tilde{P}_k^{\dot{a}} \tilde{u}_k(\sigma) \quad (241)$$

今度は独立な成分が + 外線の本数と同じ p 個であることに注意しよう。これはちょうど $\lambda(\sigma)$ の展開が - 外線と同じ数の多項式によって可能であったことと対照的である。今度は \tilde{u}_k を次の条件を満足するように取っておくのが便利である。

$$\tilde{u}_k(\sigma_i) = \delta_{k,i}, \quad k, i \in I_+. \quad (242)$$

² ここで現れた \tilde{P} は [4] では T と書かれているものである。

拘束条件 (239) が (240) のように解けるということは、ある $f(\sigma_i)$ を用いて Q 積分 (238) が次のように書き換えられることを意味している。

$$\int d^{2q}Q \prod_i \exp(i[Q(\sigma_i), \tilde{\lambda}_i]) = f(\sigma_i) \int d^{2p}\tilde{P} \prod_{i \in n} \delta^2 \left(\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} - \frac{\tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma_i)}{\prod_{k \neq i}(\sigma_k \cdot \sigma_i)} \right) \quad (243)$$

比例係数 $f(\sigma_i)$ を決定するために、 $2q$ 個の変数 $\tilde{\lambda}_i$ で両辺を積分してみよう。(243) の左辺は

$$\int d\tilde{\lambda} \text{左辺} = \int d^{2q}Q \prod_{i \in p} \exp(i[\mu(\sigma_i), \tilde{\lambda}_i]) \prod_{i \in q} \delta^2(\mu^{\dot{a}}(\sigma_i)) = 1 \quad (244)$$

一方 (243) の右辺は

$$\int d\tilde{\lambda} \text{右辺} = f(\sigma_i) \int d^{2p}\tilde{P} \prod_{i \in I_+} \delta^2 \left(\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} - \frac{\tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma_i)}{\prod_{k \neq i}(\sigma_k \cdot \sigma_i)} \right) = f(\sigma_i) \prod_{i \in p} \left(\frac{1}{\prod_{k \neq i}(\sigma_k \cdot \sigma_i)} \right)^{-2} \quad (245)$$

(244) と (245) が等しいことより、 $f(\sigma_i)$ は次のようにもとまる。

$$f(\sigma_i) = \prod_{i \in I_+} \frac{1}{\prod_{k \neq i}(\sigma_k \cdot \sigma_i)^2} \quad (246)$$

(243) をもちいれば、(237) は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) &= \int \frac{d^{2q}P d^{2p}\tilde{P}}{\text{vol GL}(2)} \prod_{i \in n} \left[\int \frac{d^2\sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \right] \prod_{i \in I_+} \frac{1}{\prod_{k \neq i}(\sigma_k \cdot \sigma_i)^2} \\ &\quad \times \prod_{i \in n} \left[\delta^2(\lambda_i - P(\sigma_i)) \delta^2 \left(\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} - \frac{\tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma_i)}{\prod_{k \neq i}(\sigma_k \cdot \sigma_i)} \right) \right] \end{aligned} \quad (247)$$

さらに、次の変数変換を行う。

$$\begin{aligned} \sigma_{i \in I_-} &\rightarrow \sigma_i \prod_{k \neq i} (\sigma_k \cdot \sigma_i)^{-1/(q-1)}, \\ \sigma_{i \in I_+} &\rightarrow \sigma_i, \\ P &\rightarrow P, \\ \tilde{P} &\rightarrow \tilde{P} \prod_{j \in I_-, k \neq j} (\sigma_k \cdot \sigma_j)^{-1/(q-1)}. \end{aligned} \quad (248)$$

この結果、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) &= \int \frac{d^{2q}P d^{2p}\tilde{P}}{\text{vol GL}(2)} \prod_i \left[\int \frac{d^2\sigma_i}{\sigma_i \cdot \sigma_{i+1}} \right] \frac{1}{l \neq k (\sigma_l \cdot \sigma_k)^2} \\ &\quad \times \prod_{i \in I_+} \left[\delta^2 \left(\lambda_i - \frac{P(\sigma_i)}{M_i} \right) \delta^2 \left(\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} - \tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma_i) \right) \right] \\ &\quad \times \prod_{i \in I_-} \left[\delta^2(\lambda_i - P(\sigma_i)) \delta^2 \left(\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} - \frac{\tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma_i)}{M_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (249)$$

これは明らかに I_+ と I_- を入れ替えると同時に λ と $\tilde{\lambda}$ を入れ替える操作のもとで不変であり、散乱振幅のパリティ不変性が示された。

以上で証明は終了したが、解 (240) がどのようなアイデアから得られるものであるかを簡単に説明しておこう。ポイントとなるのは、条件式 (239) を留数定理として解釈しなおすことである。 \tilde{P}' を σ について $1-q$ 次の、 σ_i の位置に高々 1 次の pole を持つ holomorphic differential であるとしよう。³ 一般に、このような関数は $p-1$ 次の多項式 \tilde{P} を用いて次のように書くことができる。

$$\tilde{P}'^{\dot{a}}(\sigma) = \frac{\sigma \cdot d\sigma}{\prod_{i=1}^n (\sigma_i \cdot \sigma)} \tilde{P}^{\dot{a}}(\sigma) \quad (250)$$

$\tilde{P}'^{\dot{a}}(\sigma)$ は次数が 0 ではないから、その留数は総和が 0 とは限らないが、この両辺に任意の $q-1$ 次多項式 u をかければ次数が 0 になるから、留数定理を満足し、次の式が成り立つ。

$$\sum_i u(\sigma_i) \text{Res}_{\sigma_i} \tilde{P}'^{\dot{a}}(\sigma) = 0 \quad (251)$$

これは (239) と同じ形をしており、 $\tilde{\lambda}_i = \text{Res}_{\sigma_i} \tilde{P}'$ は自動的に (239) を満足する。これが (240) にほかならない。

2.13 二つの処方法の等価性について

これまで、二つの方法で amplitude が与えられることを見た。これら二つの方法の等価性は [17] によって示された。

まず、MHV vertex の方法でわかるのは、モジュライ空間上の積分で実際に利いてくるのは二つの line が交差するときに現れる pole であるということである。[17] では、connected instanton のほうの計算でも、instanton が二つの交差した line に退化するときに pole が現れ、実際に amplitude に利くのはその pole であり、しかも両者の留数が一致していることが示された。

ここでは最も簡単な場合について見てみよう。まずは degree 2 の curve を式で表し、どのような場合に退化が起こるかを見ることにする。

まず、curve の式を次のようにとる。

$$C_2 : z^A = \beta_0^A + \beta_1^A \sigma + \beta_2^A \sigma^2 \quad (252)$$

ただし、これが二次曲線を表しているためには

$$\beta_0^A \neq 0, \quad \beta_2^A \neq 0. \quad (253)$$

でなければならない。(そうでなければ直線になってしまう。) β_k^A は全部で $12|12$ 個のパラメータを含むが、 σ に対する $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ の自由度および全体のリスケールの自由度を除けば実際のモジュライパラメータは $8|12$ 個である。このうち $3|4$ 個が漸近線の交点の座標をあらわし、それぞれの漸近線の向きが $2|4$ 個のパラメータで表される。のこる $1|0$ 個が漸近線から二次曲線までの距離を表すパラメータである。

³ \tilde{P}' は [4] で \tilde{P} とかかれたものである。

まず、上記の二次曲線の漸近線を定義しよう。この curve はコンパクトであるために、無限遠点は存在しない。そこで、漸近線を定義するためには「手で」無限遠点に相当する点を決める必要がある。ここでは $Z^4 = 0$ という直線との交点（二点ある）をこの curve の無限遠と定義し、そこでの接線を漸近線とする。

このためには $SL(2, \mathbb{R})$ を用いて $\beta_0^A = \beta_2^A = 0$ 、 $\beta_1^A = 1$ と置くのが便利である。(253) より

$$Z^A(\sigma = 0) = \beta_0^A, \quad Z^A(\sigma = \infty) = \beta_2^A, \quad (\text{up to rescaling}) \quad (254)$$

なので、 $Z^4 = 0$ との交点は $\sigma = 0$ と $\sigma = \infty$ であることがわかる。この近傍では、曲線は次のような直線で近似される。

$$C_0 : Z^A = \beta_0^A \sigma^{-1} + \beta_1^A, \quad C_\infty : Z^A = \beta_1^A + \beta_2^A \sigma. \quad (255)$$

すなわち、 C_0 は $\sigma = 0$ で curve に接する漸近線であり、 C_∞ は $\sigma = \infty$ で curve に接する漸近線である。また、これらの直線はどちらも β_1^A を通り、この交点からの向きを β_0^A と β_2^A が表している。漸近線を表すパラメータとしては、以下のものを取りことができる。

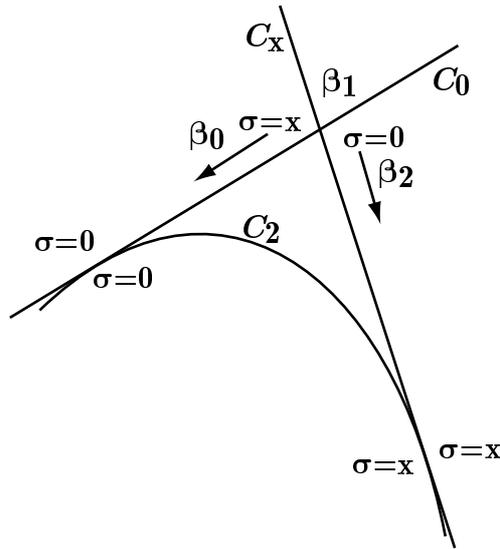


図 6: 二次曲線と漸近線

$$\beta_1^A, \quad n_0^A = \frac{\beta_0^A}{\beta_0^3}, \quad n_2^A = \frac{\beta_2^A}{\beta_2^3}. \quad (256)$$

さらに、まだ用いていない自由度を用いて $\beta_0^3 = \beta_2^3$ と取りすることができる。そしてこの共通の値 τ を二次曲線と漸近線間の距離として用いることができる。逆に、これらの独立なモジュライパラメータを用いて β_k^A を表すと、次のようになる。

$$\beta_1^A = (\beta_1^1, \beta_1^2, \beta_1^3, 1 | \beta_1^{1'}, \beta_1^{2'}, \beta_1^{3'}, \beta_1^{4'}), \quad (257)$$

$$\beta_0^A = \tau(n_0^1, n_0^2, 1, 0 | n_0^{1'}, n_0^{2'}, n_0^{3'}, n_0^{4'}), \quad (258)$$

$$\beta_2^A = \tau(n_2^1, n_2^2, 1, 0 | n_2^{1'}, n_2^{2'}, n_2^{3'}, n_2^{4'}). \quad (259)$$

このゲージ固定を行った結果、積分メジャーは

$$\frac{J}{4} \prod_{k,A} d\beta_k^A \delta(\beta_0^3/\beta_2^3 - 1) \delta(\beta_0^4) \delta(\beta_1^4 - 1) \delta(\beta_2^4) = -\tau^{-3} d\tau \prod_{A \neq 4} d\beta_1^A \prod_{A \neq 3,4} dn_0^A dn_2^A. \quad (260)$$

もうひとつ考えなければならないものとして、curve 上の相関関数

$$\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \prod_{i=1}^n \frac{d\sigma_i}{\sigma_i - \sigma_{i+1}} \quad (261)$$

がある。curve が退化する極限 $\tau \rightarrow 0$ ではそれぞれの点がどちらかの漸近線上にのることになるが、ここでは $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ が $\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_n$ が σ_i をそのままにして $\tau \rightarrow 0$ の極限を取ってしまうと、全ての点が交点 $Z^A = \beta_1^A$ につぶれてしまうので、次のように変数変換する。

$$\sigma_{i \in \{1,2,\dots,m\}} = \hat{\sigma}_i / \tau, \quad \sigma_{i \in \{m+1,\dots,n\}} = \tau / \hat{\sigma}'_i. \quad (262)$$

このように変数変換をすると、up to rescaling で

$$z_{i \in \{1,\dots,m\}}^A = \tau^2 n_0^A \hat{\sigma}_i^{-1} + \beta_1^A + n_2^A \hat{\sigma}_i, \quad z_{i \in \{m+1,\dots,n\}}^A = n_0^A \hat{\sigma}'_i + \beta_1^A + \tau^2 n_2^A \hat{\sigma}'_i^{-1} \quad (263)$$

となり、 $\tau \rightarrow 0$ の極限でそれぞれ C_0 および C_∞ に乗ることがわかる。変数変換 (262) のもとで、相関関数 (261) がどのようなかを見てみると、

$$\frac{d\sigma_{i \in \{1,\dots,m-1\}}}{\sigma_i - \sigma_{i+1}} = \frac{d\hat{\sigma}_i}{\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_{i+1}}, \quad (264)$$

$$\frac{d\sigma_m}{\sigma_m - \sigma_{m+1}} = \frac{d\hat{\sigma}_m}{\hat{\sigma}_m - \tau^2 / \hat{\sigma}'_{m+1}}, \quad (265)$$

$$\frac{d\sigma_{\{i \in m+1,\dots,n-1\}}}{\sigma_i - \sigma_{i+1}} = \frac{d\hat{\sigma}'_i}{\hat{\sigma}'_i - \hat{\sigma}'_{m+1}} \frac{\hat{\sigma}'_{i+1}}{\hat{\sigma}'_i}, \quad (266)$$

$$\frac{d\sigma_n}{\sigma_n - \sigma_1} = \tau^2 \frac{d\hat{\sigma}'_n}{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_n'^2 - \tau^2 \hat{\sigma}'_n}. \quad (267)$$

これらを全て掛け合わせると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \omega(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \tau^2 \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{d\hat{\sigma}_i}{\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_{i+1}} \right) \frac{d\hat{\sigma}_m}{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_m} \left(\prod_{i=m+1}^{n-1} \frac{d\hat{\sigma}'_i}{\hat{\sigma}'_i - \hat{\sigma}'_{i+1}} \right) \frac{d\hat{\sigma}'_n}{\hat{\sigma}'_{m+1} \hat{\sigma}'_n} \\ &= \tau^2 \omega'(0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m) \omega'(0, \hat{\sigma}_{m+1}, \dots, \hat{\sigma}_n) \end{aligned} \quad (268)$$

これを (260) のメジャーで積分し、「 τ の積分路を $\tau = 0$ を囲むように取れば、」ちょうど disconnected prescription の結果と一致する。

参考文献

- [1] Parke, Taylor, PLB157(1985)81

- [2] Grisaru, Pendelton, NPB124(1977)81
- [3] Parke, Taylor, PRL56(1986)2459
- [4] E. Witten,
“*Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space*”,
hep-th/0312171.
- [5] N, Berkovits,
“*An Alternative String Theory in Twistor Space for N=4 Super-Yang-Mills*”,
hep-th/0402045.
- [6] N. Berkovits, L. Motl,
“*Cubic Twistorial String Field Theory*”,
hep-th/0403187, JHEP 0404 (2004) 056.
- [7] A. D. Popov, C. Saemann,
“*On Supertwistors, the Penrose-Ward Transform and N=4 super Yang-Mills Theory*”,
hep-th/0405123.
- [8] N. Berkovits, E. Witten,
“*Conformal Supergravity in Twistor-String Theory*”,
hep-th/0406051.
- [9] O. Lechtenfeld, A. D. Popov,
“*Supertwistors and Cubic String Field Theory for Open N=2 Strings*”,
hep-th/0406179.
- [10] R. Roiban, M. Spradlin, A. Volovich,
“*A Googly Amplitude from the B-model in Twistor Space*”,
hep-th/0402016, JHEP 0404 (2004) 012.
- [11] R. Roiban, A. Volovich,
“*All Googly Amplitudes from the B-model in Twistor Space*”,
hep-th/0402121.
- [12] F. Cachazo, P. Svrcek, E. Witten,
“*MHV Vertices And Tree Amplitudes In Gauge Theory*”,
hep-th/0403047.
- [13] C.-J. Zhu,
“*The Googly Amplitudes in Gauge Theory*”,
hep-th/0403115, JHEP 0404 (2004) 032.

- [14] R. Roiban, M. Spradlin, A. Volovich,
“*On the Tree-Level S-Matrix of Yang-Mills Theory*”,
hep-th/0403190.
- [15] E. Witten,
“*Parity Invariance For Strings In Twistor Space*”,
hep-th/0403199.
- [16] G. Georgiou, V. V. Khoze,
“*Tree Amplitudes in Gauge Theory as Scalar MHV Diagrams*”,
hep-th/0404072, JHEP 0405:070, 2004.
- [17] S. Gukov, L. Motl, A. Neitzke,
“*Equivalence of twistor prescriptions for super Yang-Mills*”,
hep-th/0404085.
- [18] S. Giombi, R. Ricci, D. Robles-Llana, D. Trancanelli,
“*A Note on Twistor Gravity Amplitudes*”,
hep-th/0405086.
- [19] J.-B. Wu, C.-J. Zhu,
“*MHV Vertices and Scattering Amplitudes in Gauge Theory*”,
hep-th/0406085.
- [20] I. Bena, Z. Bern, D. A. Kosower,
“*Twistor-Space Recursive Formulation of Gauge-Theory Amplitudes*”,
hep-th/0406133.
- [21] J.-B. Wu, C.-J. Zhu,
“*MHV Vertices and Fermionic Scattering Amplitudes in Gauge Theory with Quarks
and Gluinos*”,
hep-th/0406146.
- [22] F. Cachazo, P. Svrcek, E. Witten,
“*Twistor Space Structure Of One-Loop Amplitudes In Gauge Theory*”,
hep-th/0406177
- [23] A. Neitzke, C. Vafa,
“*N=2 strings and the twistorial Calabi-Yau*”,
hep-th/0402128.
- [24] N. Nekrasov, H. Ooguri, C. Vafa,
“*S-duality and Topological Strings*”,
hep-th/0403167.

- [25] M. Aganagic, C. Vafa,
“*Mirror Symmetry and Supermanifolds*”,
hep-th/0403192.
- [26] S. P. Kumar, G. Policastro,
“*Strings in Twistor Superspace and Mirror Symmetry*”,
hep-th/0405236.
- [27] 浜中真志,
“ADHM/Nahm 構成法とその双対性”,
素粒子論研究 106-1 (2002-10) 1.
- [28] R.S.Ward, R.O.Wells,Jr,
“*Twistor Geometry and Field Theory*”,
Cambridge University Press.
- [29] F. Hadrovich,
“*Twistor Primer*”,
<http://henry.pha.jhu.edu/twistors.pdf>.
- [30] W. Siegel,
“ *$N=2$ (4) string theory is self-dual $N=4$ Yang-Mills theory*”,
Phys.Rev.D 46(1992)R3235.
- [31] W. Siegel,
“*Self-Dual $N=8$ Supergravity as Closed $N=2(4)$ Strings*”,
Phys.Rev. D47 (1993) 2504, hep-th/9207043.
- [32] Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng,
“*New Recursion Relations for Tree Amplitudes of Gluons*”,
hep-th/0412308.
- [33] Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, Edward Witten,
“*Direct Proof Of Tree-Level Recursion Relation In Yang-Mills Theory*”,
hep-th/0501052.
- [34] Freddy Cachazo, Peter Svrcek, Lectures on Twistor Strings and Perturbative Yang-Mills Theory, hep-th/0504194.